

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д.Н. Прянишникова»

Е.П. Аксёнов

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Пермь
ИПЦ «Прокростъ»
2016

УДК 51(075)
ББК 22. 1я7
А 424

Рецензенты:

В.Д. Галкин, доктор технических наук, профессор, декан инженерного факультета
ФГБОУ ВО Пермская ГСХА;

В.В. Аюпов, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей
математики ФГБОУ ВО Пермская ГСХА.

А424 Аксёнов, Е.П.

Методы оптимальных решений: учебное пособие / М-во с.х. РФ; федеральное гос.
бюджетное образов. учреждение высшего образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им.
акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2016. – 90 с.
ISBN 978-5-94279-301-2

Учебное пособие подготовлено в соответствии с рабочими программами изучения дисциплин: методы оптимальных решений, оптимизация процессов и принятие решений, методы оптимизации. В нём изложен материал по решению задач линейного программирования, разъясняющих теоретические вопросы и их практическое применение. Приведены примеры решения задач графическим методом, симплекс-методом, методом искусственного базиса, двойственным симплексным методом. Рассмотрены двойственные задачи, транспортные задачи и задачи целочисленного программирования. В учебное пособие включены контрольные задания по всем изложенным темам.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов, получающих образование по направлениям подготовки 38.03.01. «Экономика» (профили: финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит, экономика предприятий и организаций); 35.03.06. «Агроинженерия» (профиль: технические системы в агробизнесе) очного и заочного обучения.

**УДК 51(075)
ББК 22. 1я7**

Учебное пособие рассмотрено и одобрено на заседании кафедры высшей математики ФГБОУ ВО Пермская ГСХА (протокол №6 от 26.01.2016 г.) и рекомендовано к изданию методической комиссией инженерного факультета ФГБОУ ВО Пермская ГСХА (протокол № 4 от 09.02.2016 г.).

ISBN 978-5-94279-301-2

© Аксёнов Е.П., 2016
© ИПЦ «Прокрость», 2016

Содержание

Введение.....	5
1. Задачи линейного программирования.....	7
1.1. Математические модели экономических задач.....	7
1.2. Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме.....	9
1.3. Симметрическая или стандартная форма задач линейного программирования.....	11
1.4. Приведение задачи (3) к канонической форме.....	14
1.5. Приведение задачи (3) к стандартной (симметрической) форме.....	15
2. Графический метод в задачах линейного программирования.....	18
2.1. Применение графического метода в задаче (6).....	18
2.2. Влияние параметров на решение задач линейного программирования графическим методом.....	22
3. Симплекс-метод в задачах линейного программирования.....	28
3.1. Пример применения симплекс-метода.....	31
3.2. Исследование решения задачи линейного программирования симплекс-методом.....	35
3.3. Алгоритм решения задачи симплексным методом.....	35
4. Теория двойственности.....	41
4.1. Пример применения теории двойственности.....	44
5. Целочисленные задачи линейного программирования.....	49
6. Транспортная задача.....	51
6.1. Этапы решения транспортной задачи.....	53
6.2. Пример нахождения исходного опорного решения.....	54
6.3. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность.....	61
7. Двойственный симплексный метод.....	66
7.1. Пример применения двойственного симплекс-метода.....	68
8. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования...	72
8.1. Алгоритм метода Гомори.....	72
8.2. Пример применения метода Гомори.....	74
9. Практикум по линейному программированию.....	76

Заключение.....	89
Литература.....	90

Введение

Задачи управления и планирования обычно сводятся к выбору некоторой системы параметров и системы функций, которые математически приводят к экстремальным задачам следующего вида: требуется найти переменные задачи x_1, x_2, \dots, x_n , их обычно записывают в виде вектора $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые обеспечивают экстремум целевой функции

$$Z(X)=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (1)$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{aligned} \varphi_i x_1, x_2, \dots, x_n &= 0, i = 1, 2, \dots, l; \\ \varphi_i x_1, x_2, \dots, x_n &\leq 0 \geq 0, i = l + 1, l + 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

Это общая задача математического программирования. В зависимости от вида целевой функции (1) и системы ограничений (2) математическое программирование делится на линейное и нелинейное.

Под линейным программированием понимается раздел теории экстремальных задач, в котором изучаются задачи минимизации (или максимизации) линейных функций, на множествах (ограничениях), задаваемых системами линейных равенств и неравенств.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n -мерный вектор $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности ($x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$). Множество допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР).

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

Рождение линейного программирования связано с работой нашего отечественного математика Л.В. Канторовича, написанный им в 1939 г и

посвященной оптимизации раскроя листов фанеры для самолетов. В этой же работе было показано, что многие задачи экономики формулируются как задачи об экстремуме линейной функции при линейных ограничениях. Для рассматриваемого класса задач Л.В. Канторович ввёл двойственные переменные и дал им содержательную экономическую интерпретацию. Им же был указан алгоритм решения двойственной задачи, близкой по своим идеям к симплекс-методу. В 1947 году появились работы, посвященные разработке той же тематики, американского экономиста Т. Купманса (Koopmans T.). Именно он ввел термин «линейное программирование». В 1975 г. Л.В. Канторовичу и Т. Купмансу была присуждена Нобелевская премия по экономике.

Данное пособие адресовано студентам, обучающимся по направлениям 38.03.01. «Экономика»; 35.03.06. «Агроинженерия»

В пособии приведены решения характерных задач линейного программирования. Умение решать эти задачи необходимо каждому студенту для успешного выполнения учебного плана по высшей математике.

Для самостоятельной работы представлены шесть заданий (по 30 вариантов задач в каждом), аналогичные разобранным в пособии. Эти задачи могут использоваться для контрольных работ, предлагаемых студентам.

Автор выражает благодарность профессору В.Д. Галкину и доценту В.В. Аюпову за рецензирование рукописи и сделанные ими замечания.

1. Задачи линейного программирования

*При изучении всех наук примеры полезнее правил.
Исаак Ньютон*

1.1. Математические модели экономических задач

Математической моделью экономической задачи называется совокупность математических соотношений, описывающих рассматриваемый экономический процесс. Для составления математической модели необходимо: 1) выбрать переменные задачи; 2) составить систему ограничений; 3) задать целевую функцию.

Рассмотрим задачи, математические модели которых являются задачами линейного программирования.

Задача использования ресурсов. При производстве n видов продукции используются m видов ресурсов (сырья, энергии, комплектующих). Известны: запасы ресурсов: b_1, b_2, \dots, b_m ; расход каждого i -го вида ресурса на изготовление единицы j -й продукции, который будем обозначать a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$); c_j – прибыль, получаемая при реализации единицы j -й продукции ($j=1, 2, \dots, n$). Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Математическая модель. Пусть $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – искомый вектор задачи, где $x_j(j=1, 2, \dots, n)$ – объем выпуска j -той продукции. Тогда $c_j x_j$ – прибыль от реализации всего объема j -той продукции, $a_{ij} x_j$ – затраты i -го вида ресурса на весь объем выпуска j -той продукции. Так как общее количество затраченных i -тых ресурсов на производство всех видов продукции равно $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ и оно не может превосходить их запаса b_i , то должно выполняться неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (*)$$

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max,$$
$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ & \dots\dots\dots; \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n . \end{aligned}$$

Математическая модель. Введем переменные задачи $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_j ($j=1,2,\dots,n$) – объем j – го вида корма, входящего в суточный рацион. Так как $a_{ij}x_j$ – количество i - го питательного вещества, содержащегося в j -ом виде корма, входящего в суточный рацион, c_jx_j – стоимость j -го корма, то математическая модель имеет вид:

[illegible]

1.2. Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме.

Каноническая задача линейного программирования имеет вид:

[illegible]

Она отличается от других задач тем, что ее система ограничений является системой уравнений и все переменные неотрицательные.

При необходимости перехода от неравенства к уравнению вводят дополнительные переменные. Неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ заменяется уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ и условием неотрицательности дополнительной переменной $x_{n+1} \geq 0$, а неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ – уравнением $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$ и условием неотрицательности $x_{n+1} \geq 0$. Дополнительные переменные вводят в целевую функцию с коэффициентом, равным нулю.

Любая переменная x_j , на которую не наложено условие неотрицательности, заменяется разностью двух других неотрицательных переменных $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$.

В канонической задаче целевая функция может, как минимизироваться, так и максимизироваться. Для того, чтобы перейти от нахождения \min к нахождению \max или наоборот, достаточно изменить знаки коэффициентов целевой функции. Полученная в результате этого задача и исходная задача имеют одно и то же оптимальное решение, а значения целевых функций на этом решении отличаются только знаком.

Пример. Привести к каноническому виду задачу линейного программирования

$$Z(X)=3x_1+x_2+x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 5; \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} +x_4 \\ -x_5 \end{array} \right. \text{ в целях превращения в уравнения.}$$

Решение. Перейдем к задаче на отыскание max целевой функции. Для этого изменим знаки коэффициентов целевой функции. Переменную x_1 , на которую не наложено условие неотрицательности, заменим разностью

$$x_1 = x_1' - x_1'', \quad x_1' \geq 0, \quad x_1'' \geq 0.$$

Записываем задачу в каноническом виде:

$$Z(X) = -3x_1' + 3x_1'' - x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{l} x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1' - x_1'' - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1' - 2x_1'' + x_2 - 2x_3 - x_5 = 5; \\ x_1' \geq 0, x_1'' \geq 0, x_j \geq 0, j = 2, 3, 4, 5. \end{array}$$

Замечание. Матрица A , составленная из коэффициентов системы (1), называется матрицей условий канонической задачи линейного программирования. Будем считать, что $\text{rang } A = m$. Значит $n \geq m$.

Если это не так, т.е. $\text{rang } A < m$, то находим ранг расширенной матрицы B , составленной из коэффициентов и свободных членов системы уравнений (1), который обозначим $\text{rang } B$.

Если окажется $\text{rang } B > \text{rang } A$, то система (1) несовместна, и рассматриваемая каноническая задача линейного программирования решения не имеет. Если же $\text{rang } B = \text{rang } A = m_1 < m$, то в системе (1) оставим только те m_1 соотношений, которые определяют ее ранг, а остальные соотношения

опускаем, понимая, что они являются следствием оставшихся. Во всех дальнейших рассуждениях надо под числом m подразумевать число m_1 .

Если $n=m$, то (1) имеет единственное решение, которое и будет решением рассматриваемой задачи линейного программирования. Поэтому в дальнейшем будем считать, что параметры удовлетворяют соотношениям $n > m = \text{rang } A$.

1.3. Симметрическая или стандартная форма задач линейного программирования

При решении некоторых задач возникает необходимость перехода от канонической задачи к симметричной, которая в матричной записи имеет вид:

$$\begin{aligned} Z(X) &= CX \rightarrow \max; \\ AX &\leq A_0, X \geq 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} Z(X) &= CX \rightarrow \min; \\ AX &\geq A_0, X \geq 0, \end{aligned}$$

где $C=(c_1, c_2, \dots, c_n)$; $A=$

a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots
a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}

; $X=$

x_1
x_2
\cdot
\cdot
\cdot
\cdot
x_n

; $A_0=$

b_1
b_2
\cdot
\cdot
\cdot
\cdot
b_m

.

Покажем, как можно перейти от канонической формы задачи линейного программирования к стандартной форме на примере.

Пример. Привести к симметричному виду каноническую задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 6; \\ -7x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2; \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Решение:

	x_1	x_2	x_3	x_4	θ	
	3	-2	1	4	6	$\cdot(-3) \quad \cdot(-1)$
	-7	10	3	-4	2	$\leftarrow \begin{array}{ l} \hline \end{array}$
Целевая функция \rightarrow	4	-5	1	2	0	$\leftarrow \begin{array}{ l} \hline \end{array}$
	3	-2	1	4	6	
	-16	16	0	-16	-16	$\cdot(\frac{1}{16})$
	1	-3	0	-2	-6	
	3	-2	1	4	6	$\leftarrow \begin{array}{ l} \hline \end{array}$
	-1	1	0	-1	-1	$\cdot(2) \quad \cdot(3)$
	1	-3	0	-2	-6	$\leftarrow \begin{array}{ l} \hline \end{array}$
	1	0	1	2	4	
	-1	1	0	-1	-1	
	-2	0	0	-5	-9	

$$Z(X) = -2x_1 - 5x_4 + 9 \rightarrow \max;$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_4 &= 4; \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= -1; \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Отбросив неотрицательные x_2, x_3 , получим:

$$Z(X) = -2x_1 - 5x_4 + 9 \rightarrow \max;$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &\leq 4; \\ -x_1 - x_4 &\leq -1; \\ x_1 &\geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим конкретную экономико-производственную задачу, составим её математическую модель и покажем, как можно перейти от одной формы задачи линейного программирования к другой форме.

Пусть заводу, производящему экологически чистую продукцию, требуется производить утилизацию отходов своего производства. Для этого на заводе создана специальная утилизационная камера, куда загружаются определенные количества отходов и химические реагенты P_1, P_2, P_3 . Реагенты завод покупает у их производителей. Для уменьшения себестоимости своей продукции заводу желательно минимизировать расходы на процесс утилизации. Если обозначать через x_1, x_2, x_3 количество реагентов P_1, P_2, P_3 , загружаемых вместе с утилизируемым количеством отходов в камеру, то технологические параметры процесса требуют соблюдения следующих условий:

1. Для полной утилизации всей партии отходов общее количество реагентов должно составлять 20 условных единиц, которые можно обеспечить либо за счет 10 условных единиц количества реагента P_1 , либо 20 условных единиц количества реагента P_2 , либо $\frac{20}{3}$ условных единиц количества реагента P_3 , либо при совместном использовании всех реагентов.

2. Для обеспечения пожарной безопасности общее количество реагентов P_1 и P_2 в камере смешивания всех трех реагентов не должно превышать учетверённого количества третьего реагента P_3 больше, чем на 12 условных единиц.

3. Для начала процесса утилизации общее количество реагентов не может быть менее 30 условных единиц, что можно обеспечить либо за счёт 30 условных единиц количества реагента P_1 , либо 10 условных единиц количества реагента P_2 , либо 15 условных единиц количества реагента P_3 .

4. Условия технологического процесса таковы, что в результате смешения реагентов P_1 и P_3 образуется реагент P_2 . Если количество этого реагента превышает уровень, требуемый для успешного проведения реакции утилизации, предусмотрена возможность отвода его излишнего количества.

Если цена за условную единицу количества реагента P_1 составляет 40 рублей, реагента P_2 – 50 рублей и реагента P_3 – 10 рублей, то себестоимость продукции завода будет тем меньше, чем меньше функция:

$$Z(X) = 40x_1 + 50x_2 + 10x_3.$$

Тогда задача об уменьшении себестоимости продукции завода математически равносильна следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} Z X &= 40x_1 + 50x_2 + 10x_3 \rightarrow \min; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &\leq 12; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 30; \\ x_1 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение задачи (2) очевидно будет являться решением и следующей задачи:

$$\begin{aligned} Z X &= -40x_1 - 50x_2 - 10x_3 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &\leq 12; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 30; \\ x_1 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned} \left| \begin{array}{l} +x_4 \\ -x_5 \end{array} \right. \tag{3}$$

По своей форме ни одна из этих задач не является канонической. Представим, например, (3) в канонической форме.

1.4. Приведение задачи (3) к канонической форме

Для превращения второго и третьего неравенства системы ограничений в уравнения, введем неотрицательные дополнительные переменные x_4 , x_5 . Переменная x_4 вводится в левую часть неравенства «меньше» со знаком +, а

x_5 – в левую часть неравенства «больше» со знаком -. В целевую функцию переменные x_4, x_5 вводятся с коэффициентами, равными нулю. Переменную x_2 , на которую не наложено условие неотрицательности, заменим разностью $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_2' \geq 0$, $x_2'' \geq 0$. В результате получим следующую каноническую форму рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} Z \quad X &= -40x_1 - 50x_2' + 50x_2'' - 10x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2' - x_2'' + 3x_3 &= 20; \\ x_1 + x_2' - x_2'' - 4x_3 + x_4 &= 12; \\ x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + 2x_3 - x_5 &= 30; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2' \geq 0, \quad x_2'' \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Представим теперь нашу задачу в стандартной (симметрической) форме. Такое представление необходимо для решения так называемых двойственных задач линейного программирования. Кроме того, оно обычно используется для графической иллюстрации решения многих таких задач.

1.5. Приведение задачи (3) к стандартной (симметрической) форме

Для достижения этой цели после представления решаемой задачи в канонической форме можно разрешить уравнения-ограничения относительно каких-либо переменных, называемых базисными. Остальные переменные называются свободными. Число базисных переменных совпадает с рангом матрицы A рассматриваемой задачи. В нашем случае это число равно 3. Это значит, что надо преобразовать исходную систему трех уравнений в такую эквивалентную систему, в которой каждая из выбранных базисных переменных входит, причем с коэффициентом, равным 1, лишь в одно из этих уравнений. Этого можно добиться, применяя метод Гаусса решения систем линейных уравнений, т.е. путем последовательного исключения базисных переменных.

Эти вычисления обычно проводят, используя таблицу коэффициентов решаемой задачи. Так будем называть таблицу из коэффициентов при x_i в уравнениях-ограничениях и в оптимизируемой функции.

	x_1	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	b	
	2	1	-1	3	0	0	20	
	1	1	-1	-4	1	0	12	
	1	3	-3	2	0	-1	30	$\times(-1)$
Целевая функция \rightarrow	-40	-50	50	-10	0	0	0	

Анализируя коэффициенты при неизвестных в уравнениях-ограничителях, видим, что за одну из базисных переменных естественно принять x_4 (эта переменная входит лишь во второе уравнение-ограничение, причем с коэффициентом 1). За другую базисную переменную можно принять x_5 . А за соответствующее ему разрешающее уравнение взять третье уравнение системы, помноженное на (-1) . За третью базисную переменную удобно принять x_2' (она уже с коэффициентом 1), и применяем метод Гаусса.

x_1	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	b	
2	1	-1	3	0	0	20	$\times(-1)$
1	1	-1	-4	1	0	12	\leftarrow
-1	-3	3	-2	0	1	-30	\leftarrow
-40	-50	50	-10	0	0	0	\leftarrow

$\times(3) \quad \times(50)$

x_1	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	b
2	1	-1	3	0	0	20
-1	0	0	-7	1	0	-8
5	0	0	7	0	1	30
60	0	0	140	0	0	1000

Полученная таблица значений коэффициентов позволяет переформулировать исследуемую задачу в виде:

$$\begin{aligned}
Z(X) &= 1000 + 60x_1 + 0x_2' + 0x_2'' + 140x_3 + 0x_4 + x_5 \rightarrow \max; \\
2x_1 + x_2' - x_2'' + 3x_3 &= 20; \\
-x_1 - 7x_3 + x_4 &= -8; \\
5x_1 + 7x_3 + x_5 &= 30; \\
x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что (4) не является допустимой по строкам канонической формой задачи (3), поскольку правая часть второго уравнения отрицательна. Чтобы она стала таковой, достаточно умножить это уравнение на (-1), получим систему (5). Преобразуем (4) к стандартной (симметрической) форме. Учитывая неотрицательность базисных координат x_2' , x_4 , x_5 , отбросив их из уравнений-условий, получим, что оставшиеся свободные координаты будут связаны неравенствами (\leq). Кроме того формальное присутствие базисных координат в целевой функции позволяет не учитывать их. В результате задача будет эквивалентна следующей задаче линейного программирования, записанной в стандартном или симметрическом виде:

$$\begin{aligned}
Z(X) &= 1000 + 60x_1 + 0x_2'' + 140x_3 \rightarrow \max; \\
2x_1 - x_2'' + 3x_3 &\leq 20; \\
-x_1 - 7x_3 &\leq -8; \\
5x_1 + 7x_3 &\leq 30; \\
x_1 \geq 0, x_2'' \geq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Получившаяся задача допускает дальнейшее упрощение. Действительно, координата x_2'' и в целевой функции $Z(X)$, и во втором, и в третьем неравенствах – ограничениях входит с нулевым коэффициентом, а в первом неравенстве – с отрицательным коэффициентом (-1). Неотрицательность x_2'' позволяет нам опустить первое уравнение (как всегда выполнимое при любых значениях координат x_1 , x_3). А тогда вообще можно не упоминать об этой координате в рассматриваемой задаче. Учитывая также, что присутствующий в выражении $Z(X)$ постоянный член 1000 влияет лишь на конечное значение оптимизируемой функции, но не на значения координат x_1 , x_3 , при которых $Z(X)$ достигает своего наибольшего значения,

приходим к выводу, что исходная задача равносильна следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} Z X &= 60x_1 + 140x_3 \rightarrow \max; \\ -x_1 - 7x_3 &\leq -8; \\ 5x_1 + 7x_3 &\leq 30; \\ x_1 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В соответствии с данным выше определением эта задача будет стандартной (симметрической) задачей на максимум. Для ее решения разработаны различные методы. Одним из них является графический метод решения задач линейного программирования.

2. Графический метод в задачах линейного программирования

Графический метод решения задач линейного программирования эффективен лишь в случае, когда разность между числом переменных n и числом условий на эти переменные m не превышает 2. Можно, конечно, распространить этот метод на случай, когда эта разность будет равна 3. Тогда геометрическая интерпретация такой задачи будет заключаться в определении взаимного расположения плоскостей в пространстве. Поскольку это требует умения неплохо изображать взаимное положение различных плоскостей, а начертательная геометрия основной массе студентов незнакома, геометрическое решение рассматриваемых в линейном программировании задач, как правило, ограничивается случаем, когда $n - m \leq 2$. Если же это условие не выполняется, используется общий алгоритм решения задачи линейного программирования, который называется симплекс-методом.

2.1. Применение графического метода в задаче (6).

Возможна следующая графическая иллюстрация решения полученной выше задачи (6): изобразив на плоскости x_1, x_3 область, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} -x_1 - 7x_3 &\leq -8; \\ 5x_1 + 7x_3 &\leq 30; \\ x_1 \geq 0, x_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

получим треугольник ABC с координатами вершин: $A(0; \frac{30}{7})$; $B(\frac{11}{2}; \frac{5}{14})$; $C(0; \frac{8}{7})$.

Если на той же плоскости изобразить множество точек, где оптимизируемая функция $Z(X)$ принимает постоянное значение p , то получится прямая, уравнение которой $60x_1 + 140x_3 = p$. В зависимости от величины p эта прямая, нормальный вектор которой $(60; 140) \parallel (3; 7)$, перемещается перпендикулярно ему.

На рис.1 эта прямая обозначена как прямая EE . Поскольку нормальный вектор этой прямой есть вектор $n = \{3; 7\}$, а нормальные векторы прямых AB и CB будут соответственно $n_1 = \{5; 7\}$ и $n_2 = \{1; 7\}$, то очевидно, что наибольшее значение функция $Z(X)$ примет при прохождении EE через точку $A(0; \frac{30}{7})$. Таким образом, наибольшим значением этой функции будет число

$$M = \max Z(X) = 600 \times 0 + 140 \times \frac{30}{7} = 600.$$

При этом оптимизация процесса утилизации отходов будет обеспечена при отсутствии реагента P_1 ($x_1 = 0$), при наличии $\frac{30}{7}$ условных единиц реагента P_3 ($x_3 = \frac{30}{7}$) и $\frac{50}{7}$ условных единиц реагента P_2 (для выполнения соотношения $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 20$ при $x_1 = 0$ и $x_3 = \frac{30}{7}$ необходимо, чтобы $x_2 = \frac{50}{7}$).

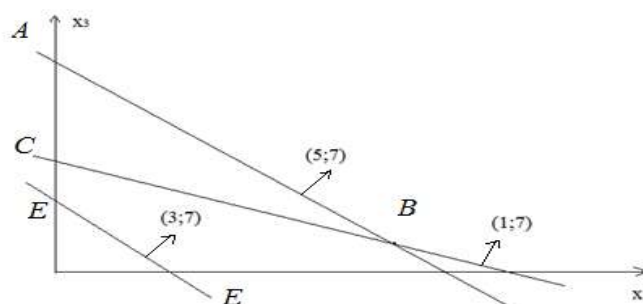


Рис.1

Графическим методом можно решать любые задачи линейного программирования, у которых соотношение между параметрами n , m удовлетворяет неравенству $n-m \leq 2$. В этом случае вначале задача преобразовывается к такому виду, что на некоторой плоскости можно изобразить область возможного изменения параметров задачи. Затем проводятся операции, аналогичные тем, что были сделаны в рассмотренном примере.

Точный алгоритм решения канонической задачи линейного программирования графическим методом в этом случае таков:

- Выбираем среди n переменных x_i , $i=1,2,\dots,n$ две переменные (обозначим их z_1, z_2), которые будем называть свободными и через которые можно однозначно выразить остальные $(n-2)$ переменных x_i , которые будем называть базисными. Очевидно, для этого достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при выбранных базисных переменных в уравнениях, составляющих условия-ограничения решаемой задачи, был бы отличен от нуля.

- Разрешаем относительно базисных переменных уравнения, составляющие условия – ограничения рассматриваемой задачи.

- Подставляя полученные выражения для базисных переменных в оптимизируемую функцию и приведя подобные члены, найдем значения коэффициентов при свободных переменных. Пусть эти коэффициенты будут c_1^*, c_2^* .

- Пользуясь неотрицательностью всех базисных переменных, заменяем каждое из полученных $(n-2)$ уравнений, составляющих условия-ограничения решаемой задачи, неравенствами, связывающими свободные переменные.

- На плоскости двух свободных переменных (z_1, z_2) изображаем области допустимых решений, отвечающих полученным неравенствам. Пусть G -пересечение всех полученных областей.

- Если G - пустое множество, то задача не имеет решения ввиду несовместимости ее системы ограничений.

- Если G не является пустым множеством, строим нормаль линии уровня решаемой задачи и одну из линий уровня, имеющую общую точку с G .

Линией уровня решаемой задачи называется прямая, на которой целевая функция задачи принимает постоянное значение.

Если, например, свободными переменными задачи являются x_1, x_2 то линия уровня имеет вид $c_1^* \cdot x_1 + c_2^* \cdot x_2 = p$, где $p = \text{const}$. Все линии уровня параллельны между собой. Их нормаль $\vec{n} = \{c_1^*, c_2^*\}$.

- Перемещаем линию уровня в направлении её нормали до опорной прямой области G в задаче на максимум и в противоположном направлении в задаче на минимум.

Опорной прямой области G называется такая линия уровня, которая имеет с G хотя бы одну общую точку и по отношению к которой сама G находится в одной из её полуплоскостей.

- Если область G неограниченна и при перемещении линии уровня в направлении, соответствующем приближению к экстремуму целевой функции, эта линия, неограниченно удаляясь от начала координат, имеет с областью G общие точки, рассматриваемая задача не имеет конечного решения ввиду неограниченности целевой функции.

- Если рассматриваемая задача имеет оптимальное решение, то для его нахождения необходимо рассмотреть взаимное расположение опорной прямой области G и прямых, являющихся границами области G .

Возможны следующие случаи:

- Если целевая функция задачи достигает экстремума в одной точке $M(z_1^*, z_2^*)$, то координаты этой точки являются оптимальными координатами тех исходных переменных рассматриваемой задачи, которые были выбраны свободными. Значения остальных переменных, обеспечивающих оптимум целевой функции, определяются по полученным ранее формулам, определяющим зависимость $(n-2)$ базисных координат через свободные.

- Если целевая функция задачи достигает экстремума в каких-либо двух точках $\{P, Q\}$, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением в этом случае будет любая выпуклая линейная комбинация этих точек, принадлежащих области G , т.е. любая общая точка области G и прямой PQ . Сама оптимальная величина целевой функции равна ее значению в любой из этих точек.

2.2. Влияние параметров на решение задач линейного программирования графическим методом

Графический метод позволяет эффективно осуществить исследование ряда задач линейного программирования, зависящих от параметров, входящих в целевую функцию и в систему линейных ограничений, т.е. выяснить при каких значениях, параметров задача будет иметь решение. Покажем это.

Задача. Исследовать решение следующей задачи линейного программирования в зависимости от значений параметров α и β .

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= \alpha x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; \\ 2x_1 - x_2 &\geq 0; \\ x_1 + x_2 &\geq 3; \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8; \\ x_2 &\geq 0; \\ x_1 &\leq \beta. \end{aligned}$$

В данной задаче область изменения переменных зависит от параметра β , а положение прямой $Z(X)=\text{Const}$ зависит от параметра α . Множество точек, удовлетворяющих первым четырем условиям задачи, образует четырёхугольник $ABCD$ с координатами вершин

$$A(2;4); B(4;0); C(3;0); D(1;2).$$

Пятому условию удовлетворяют все точки плоскости (x_1, x_2) , лежащие левее прямой $x_1 = \beta$ или на самой этой прямой. Эти области изображены на рис.2. Прямая $x_1 = \beta$ изображена пунктиром. На этом же рисунке изображена прямая EE , уравнение которой $\alpha x_1 + 2x_2 = p$. В точках этой прямой оптимизируемая

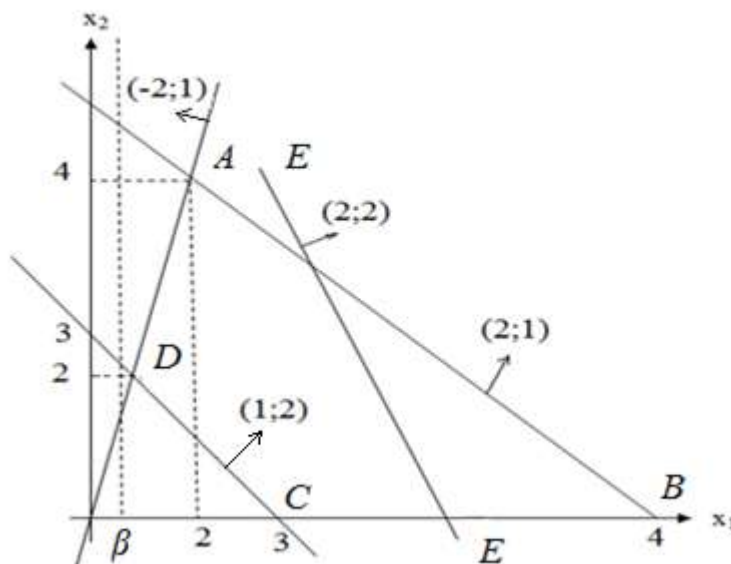


Рис.2

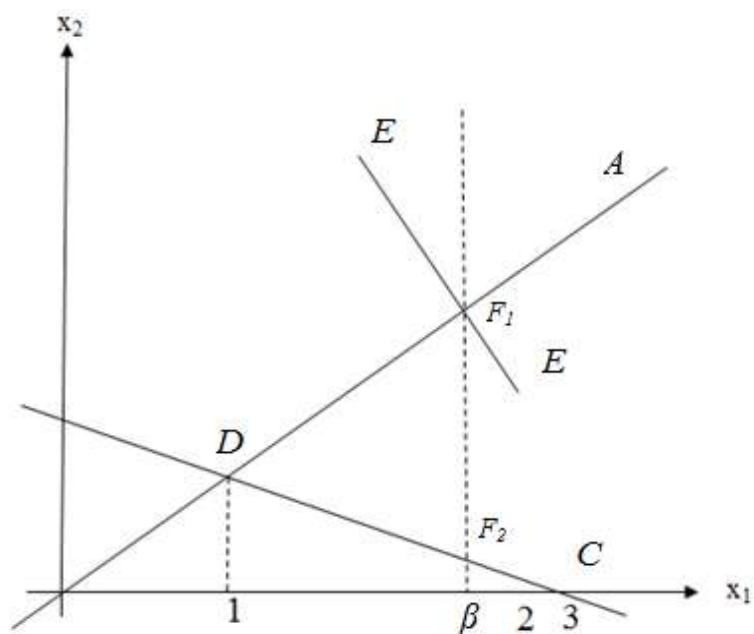
функция $Z(X)$ принимает постоянное значение p .

На рисунке изображены также нормальные вектора прямых AD , AB , CD и EE . Координаты этих векторов соответственно равны $n_{AD} = (-2;1)$; $n_{AB} = (2;1)$; $n_{CD} = (1;1)$; $n_{EE} = (\alpha; 2)$.

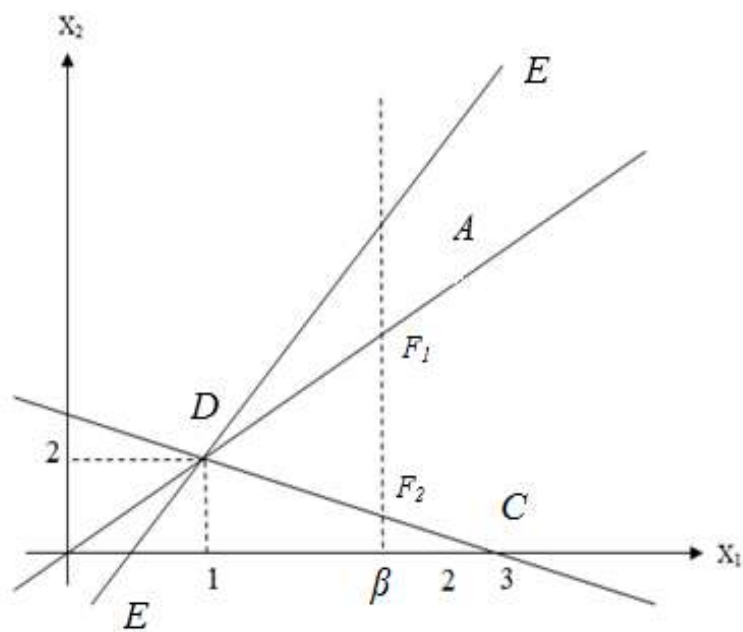
Из этого рисунка видно, что при $\beta < 1$ область $G(\beta)$ допустимых значений точек плоскости (x_1, x_2) , удовлетворяющих условиям задачи является пустым множеством. Поэтому при $\beta < 1$ задача решений не имеет.

При $\beta = 1$ область $G(\beta)$ состоит из одной точки $D(1;2)$. В этом случае $\max Z(X) = \alpha + 4$.

При $1 < \beta \leq 2$ $G(\beta)$ является треугольником DF_1F_2 , изображенным на рис. 3.



$$\alpha > -4$$



$$\alpha < -4$$

Рис.3.

Сравнивая угловой коэффициент прямых EE , DA и DC , приходим к выводу, что при $\alpha < -4$ своё возможное максимальное значение $Z(X)$ будет принимать в точке $D(1;2) \in G(\beta)$. Это значение равно $\alpha + 4$. При $\alpha = -4$ $\max Z(X) = 0$, и это значение $Z(X)$ получит в любой точке отрезка DF_1 . Наконец, при $\alpha < -4$ своё наибольшее значение $Z(X)$ достигает в точке $F_1(\beta; 2\beta)$. Это значение равно $\max Z(X) = \beta(\alpha + 4)$.

При $2 < \beta \leq 3$ $G(\beta)$ будет четырёхугольником DAF_1F_2 .. (рис.4). При этих значениях параметра β максимум оптимизируемой функции $Z(X)$ будет достигаться в вершинах D, A, F_1 этого четырёхугольника в зависимости от значения параметра α в её выражении. Это следует из графической интерпретации рассматриваемой задачи. Действительно, точки плоскости (x_1, x_2) , на которой $Z(X)$ принимает постоянное значение p принадлежат прямой $\alpha x_1 + 2x_2 = p$, которая обозначена буквами EE .

Её угловой коэффициент равен $-0,5\alpha$. Если угловой коэффициент прямой AF_1 (т.е. -2) больше этого числа, то геометрически совершенно очевидно, что наибольшее значение $Z(X)$ принимает тогда, когда прямая EE будет проходить через точку $F_1(\beta; 8 - 2\beta)$. Таким образом, при $\alpha > 4$ и при $2 < \beta \leq 3$ $\max Z(X) = \alpha\beta + 2(8 - 2\beta)$.

При $\alpha = 4$ прямая EE совпадает с прямой AF_1 . Своё наибольшее значение функция $Z(X)$ при $X \in G(\beta)$ будет принимать в любой точке прямой AF_1 . Это значение равно 16.

Аналогично рассуждая, находим, что при $-4 < \alpha < 4$ функция $Z(X)$ принимает своё наибольшее значение при прохождении прямой EE через точку $A(2;4)$. Это значение равно $2\alpha + 8$.

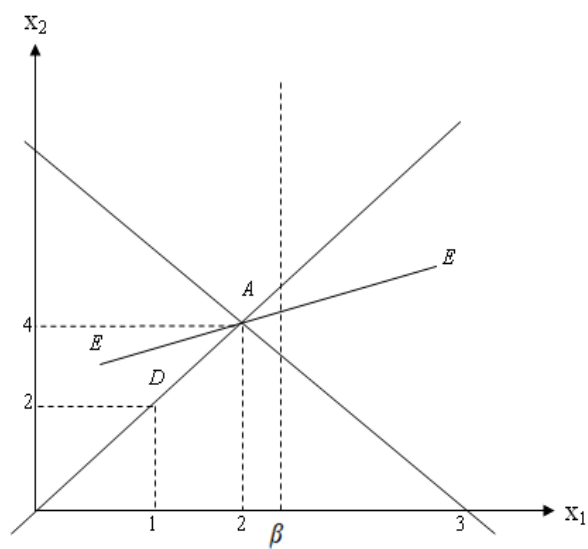
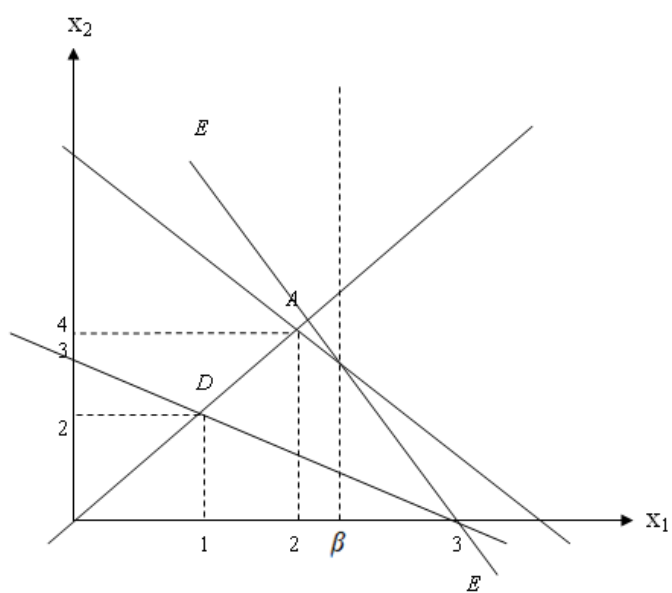
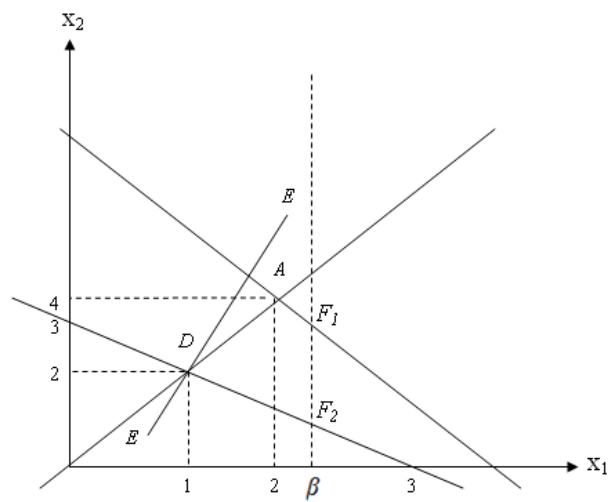


Рис.4.

При $\alpha = -4$ прямая EE совпадает с прямой AD и своё наибольшее значение (0) $Z(X)$ принимает в любой точке прямой AD .

Наконец, при $\alpha < -4$ значение p в уравнении прямой EE , при условии её непустого пересечения с областью $G(\beta)$ будет наибольшим, если она будет проходить через точку $D(1;2)$. Это наибольшее значение равно $\alpha + 4$.

При $3 < \beta \leq 4$ $G(\beta)$ будет пятиугольником DAF_1F_2C . Хотя область изменения переменных (x_1, x_2) изменилась, решение рассматриваемой задачи практически останется таким же, как и в предыдущем случае. Максимальное значение функции $Z(X)$ будет принимать в тех же точках D, A, F_1 . Причем условия, при которых максимум будет достигаться в точках D, A или F_1 , останутся такими же, как и в ранее рассмотренном случае. Это легко получается при исследовании возможного положения прямой EE относительно области $G(\beta)$.

Наконец, при $\beta > 4$ вид области $G(\beta)$ уже не будет изменяться с изменением β - эта область будет представлять из себя четырёхугольник $ABCD$. Решение будет аналогичным предыдущим случаям с заменой точки F_1 на точку $B(4;0)$.

Все описанные выше случаи изображены на рис.4. Окончательный ответ этой задачи может быть представлен в таком виде:

- При $\beta < 1$ задача не имеет решения, так как область допустимых значений вектора X – пустое множество.
- При $\beta=1$ $\max Z(X)=4+\alpha$.
- При $1 < \beta \leq 2$, $\alpha > -4$ $\max Z(X) = \beta(\alpha + 4)$.
- При $1 < \beta \leq 2$, $\alpha \leq -4$ $\max Z(X) = \alpha + 4$.
- При $2 < \beta \leq 4$, $\alpha \leq -4$ $\max Z(X) = \alpha + 4$.
- При $2 < \beta \leq 4$, $-4 < \alpha \leq 4$ $\max Z(X) = 2\alpha + 8$.
- При $2 < \beta \leq 4$, $\alpha > 4$ $\max Z(X) = \alpha\beta + 2 \cdot 8 - 2\beta$.

- При $\beta > 4$, $\alpha \leq -4$ $\max Z(X) = 4 + \alpha$.
- При $\beta > 4$, $-4 < \alpha \leq 4$ $\max Z(X) = 2\alpha + 8$.
- При $\beta > 4$, $\alpha > 4$ $\max Z(X) = 4\alpha$.

3. Симплекс-метод в задачах линейного программирования

Симплекс-метод применим для задачи, записанной в канонической форме

$$\begin{aligned} Z(X) &= CX \rightarrow \max \\ AX &= A_0, X \geq 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что ни одно из уравнений системы $AX=A_0$ не является следствием остальных уравнений этой системы. В противном случае такое уравнение может быть просто опущено.

Пусть G_X - множество векторов X , удовлетворяющих условиям $AX=A_0$, $X \geq 0$. Очевидно, что рассматриваемая задача может иметь решение лишь в случае $G_X \neq \emptyset$. Это приводит к требованию $n \geq m$. Причем в случае $n=m$ G_X состоит из одного вектора X^* , представляющего единственное решение системы $AX=A_0$. В этом случае задача нахождения $\max Z(X)$ решается тривиально: $\max Z(X) = CX^*$, $X \in G_X$.

Будем в дальнейшем считать, что $n > m$. Кроме того, преобразуем систему $AX=A_0$ так, чтобы её правые части были неотрицательны, т.е. будем считать, что $A_0 \geq 0$. Про систему

$$AX=A_0, \quad A_0 \geq 0, \tag{7}$$

полученную в результате таких преобразований, говорят, что она допустима по строкам.

Первым шагом применения симплекс-метода к системе, допустимой по строкам, является её разрешение относительно каких-либо m переменных. При этом необходимо следить за тем, чтобы новая система также оказалась допустимой по строкам. Перебором всех возможных случаев (всего их будет

C_n^m) после преобразования системы (7) методом Жордана-Гаусса всегда можно либо получить такое разрешение, либо установить его невозможность.

Напомним этот метод:

Для разрешения (7) относительно x_k выражаем x_k из какого-то l –того уравнения этой системы, и представляем полученное выражение во все остальные уравнения системы (7). Этот процесс назовём исключением x_k . Затем аналогичным образом проводим преобразование уже не содержащих x_k оставшихся уравнений, количество которых равно $(n - 1)$ – исключаем из них какую-то другую координату, например, x_k^* и т.д.

Очевидно после m таких исключений получается система, разрешенная относительно выбранных m переменных, которые называются базисными. Такую систему назовём разрешенной. Оставшиеся же $n-m$ переменные называются свободными.

При произвольном выборе базисных переменных получившаяся после проведенных преобразований система может оказаться недопустимой по строкам. Для того, чтобы избежать этого надо выражать x_k из такого l -того уравнения системы (7), для которого выполняются соотношения:

$$\theta_{ok} = \min_{1 \leq i \leq n} \theta_i = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ при } a_{ik} \geq 0.$$

После разрешения системы относительно базисных переменных находится её опорное решение, соответствующее выбранному базису. Опорным решением допустимой по строкам, разрешенной канонической системы $AX=A_0, X \geq 0$ называется такой вектор X , координаты которого, соответствующие базисным переменным, равны аналогичным координатам вектора A_0 , а координаты, соответствующие свободным переменным, равны нулю.

После нахождения опорного решения производится его оценка на оптимальность. Для этого вычисляются значения Δ_k , называемые оценкой разложения вектора условий A_k по базису опорного решения:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^m c_i x_{ik} - c_k,$$

или в векторной записи

$$\Delta_k = C_b X_k - c_k,$$

где $C_b = (c_1, \dots, c_m)$ - вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных;

$X_k = (x_{1k}, \dots, x_{mk})$ - вектор коэффициентов разложения вектора A_k по базису опорного решения:

c_k - коэффициент целевой функции при x_k .

Опорное решение задачи линейного программирования на максимум (минимум) будет оптимальным, если для любого вектора условий оценка его разложения по базису опорного решения неотрицательна (неположительна), т.е.

- в задаче на максимум $\Delta_k \geq 0 \quad \forall k=1, 2, \dots, n$;
- в задаче на минимум $\Delta_k \leq 0 \quad \forall k=1, 2, \dots, n$.

Если эти условия не выполняются, то выбирается новый базис. Для этого одна из базисных координат переводится в свободные, а одна из свободных – в базисные.

В задаче на максимум для скорейшего приближения к нему оптимизируемой функции в базисные координаты должна быть переведена та из свободных координат, для которой произведение $\{-\theta_{ok}\Delta_k\}$ принимает наибольшее значение.

В задаче на минимум для скорейшего приближения к нему оптимизируемой функции в базисные координаты должна быть переведена та из свободных координат, для которой произведение $\{-\theta_{ок}\Delta_k\}$ принимает наименьшее значение.

Алгоритмизацию этого процесса рекомендуется осуществлять с помощью составления таблиц, аналогичных рассмотренным выше таблицам коэффициентов. Напомним, что выше было объяснено, как, используя метод Жордана-Гаусса, с помощью этих таблиц разрешить систему (7) относительно выбранных базисных переменных. Если после этого разрешения получившаяся система окажется допустимой по строкам, то можно начинать применение симплекс-метода. Если же правые части некоторых из получившихся уравнений окажутся отрицательными числами, то надо, помножив эти уравнения на (-1) , заменить базисную переменную, входящую в каждое из этих уравнений, разностью двух новых базисных переменных, каждая из которых может принимать лишь неотрицательные значения. Хотя после этого получится новая система с большим числом переменных, но среди них сразу можно будет выбрать такие базисные переменные, относительно которых разрешённая система окажется допустимой по строкам. К ней уже можно применять симплекс-метод.

3.1. Пример применения симплекс-метода

Проиллюстрируем это. Вспомним, что рассмотренная выше задача о минимизации заводом, производящим экологически чистую продукцию, процесса утилизации отходов своего производства, привела к решению математической задачи линейного программирования (2), которая затем была преобразована в систему (4). Эта система является системой, разрешенной относительно переменных x_2', x_4, x_5 но недопустимой по строкам из-за того, что правая часть уравнения для базисной переменной x_4 была отрицательной. В системе, полученной из системы (4) умножением её обеих частей на (-1) , правые части положительны, но сама система уже не будет системой,

разрешенной относительно базисных переменных. Чтобы она стала таковой, достаточно заменить в последней системе и в выражении оптимизируемой функции переменную x_4 разностью двух новых неотрицательных переменных x_4' и x_4'' . Полученная система, оставшись допустимой по строкам, будет системой разрешенной относительно базисных координат x_2' , x_4'' , x_5 :

$$\begin{aligned} Z(X) &= 1000 + 60x_1 + 0x_2' + 0x_2'' + 140x_3 + 0x_4' + 0x_4'' + 0x_5 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2' - x_2'' + 3x_3 &= 20; \\ x_1 + 7x_3 - x_4' + x_4'' &= 8; \\ 5x_1 + 7x_3 + x_5 &= 30; \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_3 \geq 0, x_4' \geq 0, x_4'' \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для применения симплекс-метода к получившейся задаче составим следующую таблицу:

			60	0	0	140	0	0	0		
Б	C_6	A_0	A_1	A_2'	A_2''	A_3	A_4'	A_4''	A_5	θ_1	θ_3
A_2'	0	20	2	1	-1	3	0	0	0	10	$\frac{20}{3}$
A_4''	0	8	1	0	0	7	-1	1	0	8	$\frac{8}{7}$
A_5	0	30	5	0	0	7	0	0	1	6	$\frac{30}{7}$
Δ_i		0	-60	0	0	-140	0	0	0		

Здесь через $A_1, A_2', A_2'', A_3, A_4', A_4'', A_5$ обозначены соответственно вектора координатных осей x_1, x_1', \dots, x_5 . В первой строке таблицы указаны значения коэффициентов, с которыми переменные x_1, x_1', \dots, x_5 входят в выражение оптимизируемой функции $Z(X)$.

«Б» означает базис системы. A_0 -вектор, координаты которого соответственно равны правым частям уравнений-условий, входящих в систему.

Последний элемент столбца A_0 -значение оптимизируемой функции на опорном решении, соответствующем выбранному базису.

Значения θ_k вычисляются лишь для таких базисных координат, для которых $\Delta_k < 0$. Такая таблица называется таблицей Таккера.

Из алгоритма симплекс-метода следует, что значение оптимизируемой функции $Z(X)$ может быть увеличено, если в базисные переменные из свободных перевести либо x_1 , либо x_3 . Причем для того, чтобы при переводе в базисные переменные x_1 получившаяся система осталась допустимой по строкам, необходимо в свободные переменные отправить x_5 (для нее значение θ_1 будет наименьшим числом, это число равно 6).

Если же перевести из базисных переменных в свободные x_3 , то в свободные переменные надо отправлять A_4'' . При этом значение оптимизируемой функции изменится на величину ($\Delta Z(X) = -\theta_{ок} \Delta_k$). Это указывает, как надо выбрать новый базис, чтобы это приращение было наибольшим. Так как в нашем случае при переводе в базисные переменные x_1 $\Delta Z(X) = 360$, а при переводе x_3 $\Delta Z(X) = 160$, переводим в базисные переменные x_1 . Соответствующая таблица коэффициентов при этом будет иметь вид.

			60	0	0	140	0	0	0	
Б	C_6	A_0	A_1	A_2'	A_2''	A_3	A_4'	A_4''	A_5	θ_3
A_2'	0	8	0	1	-1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	40
A_4''	0	2	0	0	0	$\frac{28}{5}$	-1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{14}$
A_1	60	6	1	0	0	$\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{30}{7}$
Δ_i		360	0	0	0	-56	0	0	12	

Поскольку из таблицы видно, что $\Delta_3 < 0$, то значение оптимизируемой функции $Z(X)$ будет увеличено, если в базисные координаты ввести x_3 . При этом в свободные переменные надо отправить x_4'' . После соответствующих преобразований новая таблица будет иметь вид

Б	C_6	A_0	A_1	A_2'	A_2''	A_3	A_4'	A_4''	A_5	θ_4'
A_2'	0	$\frac{111}{4}$	0	1	-1	0	$\frac{1}{28}$	$-\frac{1}{28}$	$-\frac{11}{28}$	222
A_3	140	$\frac{5}{14}$	0	0	0	1	$-\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$-\frac{1}{28}$	-
A_1	60	$\frac{11}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	22
Δ_i		380	0	0	0	0	-10	10	10	

И этот выбор базисных переменных не является оптимальным. Алгоритм симплекс-метода говорит о том, что при замене в базисе вектора A_1 на вектор A_4' оптимизируемая функция увеличится. Прделаав это, получим таблицу:

Б	C_6	A_0	A_1	A_2'	A_2''	A_3	A_4'	A_4''	A_5
A_2'	0	$\frac{50}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	-1	0	0	0	$-\frac{3}{7}$
A_3	140	$\frac{30}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{7}$
A_4'	0	22	4	0	0	0	1	-1	1
Δ_i		600	40	0	0	0	0	0	20

Поскольку все Δ_k в последней таблице неотрицательны, можно утверждать, что наибольшее значение оптимизируемой функции $Z(X)$ равно 600. Это значение она принимает при следующих величинах своих переменных:

$$x_1=0, x_2'=\frac{50}{7}, x_2''=0, x_3=\frac{30}{7}, x_4'=22, x_4''=0, x_5=0.$$

Напомним, что именно такое же значение мы нашли, решая задачу (6) графическим методом.

3.2. Исследование решения задачи линейного программирования симплекс-методом

Отметим случаи, которые могут представиться при решении задачи линейного программирования с использованием симплекс-метода:

1. Оптимальное решение задачи линейного программирования является единственным, если для любого вектора условий, не входящего в базис, оценка Δ_k отлична от нуля, т.е.

$$\Delta_k \neq 0 \quad \forall k \in (m+1, m+2, \dots, n).$$

2. Задача линейного программирования имеет бесконечное множество оптимальных решений, если при оптимальном решении оценка хотя бы одного вектора условия A_k , не входящего в базис, равна 0, т.е.

$$\exists k \in \{m+1, m+2, \dots, n\}: \Delta_k = 0.$$

3. Задача линейного программирования не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, если для какого-либо из векторов условия A_k с оценкой Δ_k , противоречащей признаку оптимальности, среди коэффициентов разложения по базису опорного решения нет положительного, т.е.

- $\exists A_k: \Delta_k < 0 \text{ и } x_{ik} \leq 0 \quad \forall i;$
- $\exists A_k: \Delta_k > 0 \text{ и } x_{ik} \leq 0 \quad \forall i.$

Сформулируем, наконец, алгоритм решения задачи линейного программирования симплексным методом.

3.3. Алгоритм решения задачи симплексным методом

1. Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

2. Найти начальное опорное решение с базисом из единичных векторов и коэффициенты разложения векторов условий по базису опорного решения. Если опорное решение отсутствует, задача не имеет решения ввиду несовместимости системы ограничений.

3. Вычислить оценки разложений векторов условий по базису опорного решения и заполнить симплексную таблицу.

4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается.

5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находятся все оптимальные решения.

6. Если имеют место условия неограниченности целевой функции, то задача не имеет решения.

7. Если пункты 4-6 не выполняются, надо найти новое опорное решение и перейти к пункту 3.

Пример использования симплекс-метода

Рассмотрим еще один пример использования симплекс-метода:

$$\begin{aligned} F \quad Y &= 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \rightarrow \max; \\ 2y_1 + y_2 + y_4 &= 2; \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 &= 4; \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_6 &= 6; \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Если для этой задачи за базис пространства Y принять базис единичных векторов $\{A_4, A_5, A_6\}$, то за начальное опорное решение задачи можно взять вектор $Y_1 = \{0, 0, 0, 2, 4, 6\}$.

Тогда в соответствии со сформулированным алгоритмом решения этой задачи симплекс-методом получим следующие таблицы Таккера:

			6	5	2	0	0	0			
Б	C ₆	A ₀	A ₁	A ₂ ↓	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	θ ₁	θ ₂	θ ₃
←A ₄	0	2	2	1	0	1	0	0	1	2	-
A ₅	0	4	1	1	1	0	1	0	4	4	4
A ₆	0	6	2	-1	2	0	0	1	3	-	3
Δ _i		0	-6	-5	-2	0	0	0			
↓									θ ₃		
A ₂	5	2	2	1	0	1	0	0	-		
←A ₅	0	2	-1	0	1	-1	1	0	2		
A ₆	0	8	4	0	2	1	0	1	4		
Δ _i		10	4	0	-2	5	0	0			
A ₂	2	2	2	1	0	1	0	0	max F(Y)=14 Y*=(0,2,2,0,0,4) B*=(A ₂ , A ₃ , A ₆)		
A ₃	2	2	-1	0	1	-1	1	0			
A ₆	0	4	6	0	0	3	-2	1			
Δ _i		14	2	0	0	3	2	0			

Из верхней таблицы видно, что начальное опорное решение не будет оптимальным. Причем поскольку и Δ₁, и Δ₂, и Δ₃ являются отрицательными числами, то значение оптимизируемой функции, которое она принимает на начальном опорном решении (это значение равно 0), будет увеличено на величину $M_k = \max_k (\Delta Z_k) = \max_k [-\theta_k \Delta_k]$ после введения в базис любого из переменных x₁, x₂, x₃. Тогда в рассматриваемом примере

$M_1 = -1 \cdot (-6) = 6$, $M_2 = -2 \cdot (-5) = 10$, $M_3 = -3 \cdot (-2) = 6$. Это означает, что наибольшее увеличение оптимизируемой функции будет достигнуто при замене базисного вектора A₄ на свободный вектор A₂.

Произведя соответствующие преобразования, получим среднюю таблицу. Поскольку для неё значение Δ₃ = -2 < 0, базис A₂, A₅, A₆ также не является оптимальным. Из алгоритма решения задачи следует, что увеличение значения оптимизируемой функции возможно лишь при

введении в базис вектора A_3 . Этот вектор должен заменить базисный вектор A_5 . При этом оптимизируемая функция вырастет на величину $-2(-2)=4$. Произведя соответствующие расчеты, получим нижнюю таблицу. Поскольку из этой таблицы видно, что все значения Δ_i для свободных координат положительны, то оптимальным опорным решением будет вектор $Y^*=(0, 2, 2, 0, 0, 4)$, и максимальное значение оптимизируемой функции равно 14.

В правом нижнем углу таблицы записаны результаты применения симплекс-метода: значения оптимизируемой функции ($\max F(Y)=14$); координаты оптимизирующего её вектора $Y^*=(0, 2, 2, 0, 0, 4)$; и векторов, образующих базис опорного решения ($B^*=(A_2, A_3, A_6)$).

Рассмотрим теперь такую задачу линейного программирования, в которой значение оптимизируемой функции может быть неограниченно увеличено.

$$\begin{aligned} Z \quad X &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 12; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 8; \quad | +x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 4; \quad | -x_5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В соответствии с ранее разобранным алгоритмом нахождения опорного решения преобразуем второе и третье неравенства в условиях задачи в уравнения. Для этого, добавим в левую часть второго неравенства новую неотрицательную переменную x_4 и вычтем из левой части третьего неравенства новую неотрицательную переменную x_5 . Далее необходимо разрешить полученные уравнения относительно каких-либо трех переменных. Как указывалось выше, этого можно достичь простым перебором всех возможных комбинаций неизвестных. Однако можно, не уповав на быстрый удачный выбор базисных неизвестных, заменить переменную x_5 разностью двух новых переменных $x_5=x_5'-x_5''$, а в левую часть первого уравнения добавить переменную x_6 . После этого сразу можно

указать базисные координаты для первого опорного решения. Это будут x_6 , x_4 , x_5'' – искусственный базис. Затем можно составить таблицу Таккера и проводить преобразования переменных в соответствии с выше сформулированным алгоритмом.

			1	-2	3	0	0	0	0		
Б	C_6	A_0	A_1	A_2	$A_3 \downarrow$	A_4	A_5'	A_5''	A_6	θ_1	θ_3
A_6	0	12	3	-2	1	0	0	0	1	4	12
A_4	0	8	2	-3	1	1	0	0	0	4	8
$\leftarrow A_5''$	0	4	1	2	2	0	-1	1	0	4	2
Δ_i		0	-1	2	-3	0	0	0	0		
\downarrow										θ_5'	
A_6	0	10	2,5	-3	0	0	0,5	-0,5	1	20	
$\leftarrow A_4$	0	6	1,5	-4	0	1	0,5	-0,5	0	12	
A_3	3	2	0,5	1	1	0	-0,5	0,5	0	-	
Δ_i		6	0,5	5	0	0	-1,5	1,5	0		
\downarrow										θ_2	
$\leftarrow A_6$	0	4	1	1	0	-1	0	0	1	4	
A_5'	0	12	3	-8	0	2	1	-1	0	-	
A_3	3	8	2	-3	1	1	0	0	0	-	
Δ_i		24	5	-7	0	3	0	0	0		
A_2	-2	4	1	1	0	-1	0	0	1	$\max Z(X)=+\infty$	
A_5'	0	44	11	0	0	-6	1	-1	8		
A_3	3	20	5	0	1	-2	0	0	3		
Δ_i		52	12	0	0	-4	0	0	7		

Из первой таблицы видно, что значение оптимизируемой функции $Z(X)$ увеличится при переводе из свободных переменных в базисные x_1 , либо x_3 . Так как при переводе в базисные переменные x_1 , $\Delta Z(X) = -(-1) \cdot 4 = 4$, а при

перевode x_3 $\Delta Z(X) = -(-2) \cdot 3 = 6$, то в базисные переменные переводим x_3 . В результате получим вторую таблицу Таккера.

Эта таблица показывает, что опорное решение, построенное на базисных векторах A_6, A_4, A_3 , не является оптимальным, и при замене базисной переменной A_4 свободной переменной A_5' значение $Z(X)$ вырастет на $\Delta Z(X) = -(-1,5) \cdot 12 = 18$ и на новом опорном решении получим $Z(X) = 24$. Прделав необходимые вычисления, получим третью таблицу Таккера.

Она показывает, что последнее опорное решение также как и предыдущее не является оптимальным. Если заменить базисную переменную x_6 свободной переменной x_2 , $Z(X)$ снова вырастет на величину $\Delta Z(X) = -(-4) \cdot 7 = 28$ и станет равной $24 + 28 = 52$. Прделав необходимые вычисления, получим четвертую таблицу Таккера.

Из этой таблицы видно, что за счет перевода свободного вектора A_4 в базисные значение $Z(X)$ увеличится. Однако, поскольку все координаты этого вектора по отношению к базису A_2, A_5', A_3 отрицательны, это увеличение ничем не ограничено, т.е. $\max Z(X) = +\infty$.

Этот пример иллюстрирует следующее правило:

Если при выполнении предусмотренных симплекс-методом преобразований в задаче максимизации линейного функционала получилась таблица Таккера, в которой все координаты некоторого вектора A_i отрицательны, максимум оптимизируемой функции в этой задаче равен $+\infty$.

Большим достоинством симплекс-метода является то, что с его помощью можно получить решение сразу двух тесно связанных задач линейного программирования. Разберем экономический смысл этих задач и методы их решения.

4. Теория двойственности

Любой задаче линейного программирования ставится в соответствие другая задача, называемая двойственной или сопряженной. Например, для рассмотренной выше задачи об оптимальном использовании сырья двойственной будет задача о продаже этого сырья при условии, что выручка от такой продажи не будет меньше прибыли, которую получит предприятие, если реализует на рынке продукцию, произведенную из этого сырья.

Если за y_i обозначить цену, которую согласен заплатить покупатель за единицу i -того вида сырья, то его затраты на приобретение этого вида сырья в количестве b_i будут $b_i y_i$. Поэтому покупатель сырья будет стремиться минимизировать свои затраты $F(Y)$ (Y -вектор с координатами y_1, y_2, \dots, y_m) на покупку всего сырья:

$$F(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min.$$

Производителю же продукции имеет смысл продавать сырье, если суммарная стоимость всего объема сырья, расходуемого на каждое изделие j -той продукции, т.е. величина $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_j$ не будет меньше прибыли c_j , получаемой при реализации этого изделия. В результате система ограничений для задачи минимизации функции $F(Y)$ принимает вид:

$$\begin{aligned} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ & \dots\dots\dots; \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_m; \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \dots, \quad y_m \geq 0. \end{aligned}$$

С учетом принятых обозначений эти ограничения можно записать в виде $Y_A \geq C, Y \geq 0$.

Таким образом, получилась задача минимизации функции $F(Y)$ при условии выполнения полученных ограничений. Эта задача называется двойственной по отношению к исходной задаче, которая может быть

сформулирована как задача максимизации функции $Z(X)=CX$ при условии выполнения ограничений $AX \leq A_0, X \geq 0$.

Эта пара задач относится к симметрическим парам двойственных задач. В теории двойственности используются следующие четыре пары двойственных задач, которые мы приведем в матричной форме записи:

Симметричные пары двойственных задач

<u>Исходная</u>	<u>Двойственная</u>		<u>Исходная</u>	<u>Двойственная</u>
1. $Z(X)=CX$	$F(Y)=YA_0$		2. $Z(X)=CX$	$F(Y)=YA_0$
$Z(X) \rightarrow \max$	$F(Y) \rightarrow \min$		$Z(X) \rightarrow \min$	$F(Y) \rightarrow \max$
$AX \leq A_0$	$YA \geq C$		$AX \geq A_0$	$YA \leq C$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$		$X \geq 0$	$Y \geq 0$

Несимметричные пары двойственных задач

<u>Исходная</u>	<u>Двойственная</u>		<u>Исходная</u>	<u>Двойственная</u>
3. $Z(X)=CX$	$F(Y)=YA_0$		5. $Z(X)=CX$	$F(Y)=YA_0$
$Z(X) \rightarrow \max$	$F(Y) \rightarrow \min$		$Z(X) \rightarrow \min$	$F(Y) \rightarrow \max$
$AX=A_0$	$YA \geq C$		$AX=A_0$	$YA \leq C$
$X \geq 0$			$X \geq 0$	

Сформулируем общие правила составления двойственных задач:

- Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой.

- Ограничения – неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

- Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи " \leq ", то целевая функция $Z(X)=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$ должна максимизироваться, а если " \geq ", то –минимизироваться.

- Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничивающему неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничивающему равенству, может быть любого знака.

- Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$F(Y)=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\dots+b_my_m,$$

где c_0 – свободный член целевой функции $z(x)$ исходной задачи;

b_1, b_2, \dots, b_m - свободные члены в ограничениях исходной задачи.

При этом b_i – свободный член ограничения исходной задачи, соответствующего $y_i, y_1, y_2, \dots, y_m$ - неизвестные в двойственной задаче.

- Целевая функция $F(Y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом, т.е. если

$$Z(X) \rightarrow \max, \text{ то } F(Y) \rightarrow \min,$$

$$\text{а если } Z(X) \rightarrow \min, \text{ то } F(Y) \rightarrow \max.$$

- Каждому неизвестному $x_j, j=1,2,\dots,n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i , соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образуют систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными y_1, y_2, \dots, y_m – в левых. Все знаки неравенств имеют вид " \geq ", если $F(Y) \rightarrow \min$, и " \leq ", если $F(Y) \rightarrow \max$.

- Коэффициенты, с которыми неизвестные y_1, y_2, \dots, y_m входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j , совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_j в ограничениях исходной задачи, а именно: коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j , с которым x_j входят в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i .

4.1. Пример применения теории двойственности

Проиллюстрируем сформулированные правила.

Задача. Составить задачу, двойственную задаче

$$\begin{aligned} Z \quad X &= -40x_1 - 50x_2 + 50x_3 - 10x_4 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 20 \quad |y_1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 &\leq 12 \quad |y_2; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_6 &\geq 30 \quad |y_3; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение: используя общие правила составления двойственных задач, умножим третье ограничивающее неравенство на -1, поскольку в задаче на максимум все неравенства должны иметь вид " \leq ". Значит, математическая формулировка исходной задачи такова:

$$\begin{aligned} Z \quad X &= -40x_1 - 50x_2 + 50x_3 - 10x_4 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 20 \quad |y_1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 &\leq 12 \quad |y_2; \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_6 &\leq -30 \quad |y_3; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Тогда двойственная задача будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F \quad Y &= 20y_1 + 12y_2 - 30y_3 \rightarrow \min; \\
 2y_1 + y_2 - y_3 &\leq -40; \\
 y_1 + y_2 - 3y_3 &\leq -50; \\
 -y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leq 50; \\
 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 &\leq -10; \\
 0y_1 + y_2 + 0y_3 &\leq 0; \\
 0y_1 + 0y_2 + y_3 &\leq 0; \\
 y_2 &\geq 0, \quad y_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Подчеркнем, что переменная y_1 , соответствующая ограничивающему равенству, может быть любого знака.

Существует весьма тесная взаимосвязь между оптимальными решениями каждой пары двойственных задач. Эту связь формулирует

Теорема: Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней также имеет оптимальное решение. При этом значения целевых функций этих задач на своих оптимальных решениях совпадают. Если же одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместимости системы ограничений.

Отметим, что таблицы Таккера, заполняемые при решении одной из этих двойственных задач симплекс-методом, дают возможность мгновенно определять координаты оптимальных векторов любой из этих двойственных задач.

Покажем, как это делается на примере. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}
 Z \quad X &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \min \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 6 \quad |y_1; \\
 x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \quad |y_2; \\
 x_2 + 2x_3 &\geq 2 \quad |y_3; \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Двойственной к ней задачей будет задача:

$$\begin{aligned} F Y &= 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 \rightarrow \max; \\ 2y_1 + y_2 &\leq 2; \\ y_1 + y_2 + y_3 &\leq 4; \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 &\leq 6; \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Введя неотрицательные дополнительные переменные y_4, y_5, y_6 , приводим последнюю задачу к каноническому виду:

$$\begin{aligned} F Y &= 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \rightarrow \max; \\ 2y_1 + y_2 + y_4 &= 2; \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 &= 4; \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_6 &= 6; \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что если за базис пространства принять базис единичных векторов $\{A_4, A_5, A_6\}$, то за начальное опорное решение задачи можно принять вектор $Y_1 = \{0, 0, 0, 2, 4, 6\}$.

Напомним, что эту задачу мы уже решили раньше с помощью симплекс-метода [см. задачу (9)]. Было найдено, что максимальное значение оптимизируемой в ней функции будет равно 14, и оно достигается на векторе $Y^* = (0, 2, 2)$. Тогда из теорем двойственности следует, что для исходной задачи (11), двойственной к решенной, оптимальное значение минимизируемой функции $Z(X)$ также будет равно 14, и это значение будет достигаться на векторе $X^* = (3, 2, 0)$. Координаты этого вектора определяются следующим образом:

1. Во входной таблице Таккера надо отметить вектора, составляющие базис первого опорного решения (как видно из таблиц на с.38, это будут вектора A_4, A_5, A_6).

2. В заключительной таблице Таккера надо определить значения Δ_i в порядке, соответствующем этим векторам (в нашем случае это оказались числа $\Delta_4=3, \Delta_5=2, \Delta_6=0$).

3. Надо выписать коэффициенты c_i , с которыми вектора, составляющие базис, входят в выражение оптимизируемой функции (эти коэффициенты записаны в верхнем ряду таблицы Таккера, и в нашем случае они все равны нулю).

4. Надо из уравнения

$$X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)=(\Delta_1+c_1; \Delta_2+c_2; \dots; \Delta_m+c_m) \quad (*)$$

найти координаты вектора X^* , оптимизирующего искомый функционал.

В нашем случае из уравнения (*) получим:

$$x_1^*=\Delta_4+c_4=3+0=3;$$

$$x_2^*=\Delta_5+c_5=2+0=2;$$

$$x_3^*=\Delta_6+c_6=0+0=0.$$

Таким образом, общий алгоритм нахождения оптимального решения двойственной задачи при условии, что исходная задача решена симплекс-методом, и для него построены таблицы Таккера, состоит в следующем: из заключительной таблицы Таккера надо взять значения Δ_i , соответствующие тем индексам i , которые отвечают базису начального опорного решения, и сложить их с соответствующими коэффициентами c_i , входящими в выражение оптимизируемой функции $Z(X)$.

Это следует из доказательства теоремы двойственности, которое приведено, например, в [2]. В этой теореме доказано, что вектор, оптимизирующий двойственную задачу, может быть вычислен по формуле $C'^* D^{-1}$, где C'^* – вектор, состоящий из коэффициентов оптимизируемой в основной задаче функции $Z(X)$, а D -матрица размера $m \times m$, составленная из векторов A_i , образующих базис заключительного опорного решения с координатами, выраженными через базис первого опорного решения. В приведенном выше примере:

$$C'^* = (5; 2; 0), D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в заключительной таблице Таккера можно увидеть и компоненты матрицы D^{-1} . Они состоят из координат тех векторов, которые составляли базис начального опорного решения, выраженных через вектора, составляющие базис заключительного опорного решения. В приведенном выше примере это вектора A_4, A_5, A_6 . Значит,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рекомендуется для закрепления теоремы двойственности проверить полученные формулы, перемножая соответствующие матрицы.

5. Целочисленные задачи линейного программирования

При рассмотрении целого ряда задач линейного программирования (в том числе транспортной задачи, многих задач финансового менеджмента и бизнеса, задач экономического планирования и т.д.) необходимо учитывать требования целочисленности используемых переменных. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и число пассажиров, вмещающихся в каждом из вагонов, приведены в таблице:

Вагоны	Число вагонов в поезде		Число пассажиров	Парк вагонов
	скором	пассажирском		
плацкартный	5	8	58	92
купированный	6	4	40	80
мягкий	3	1	32	30

Определить количество скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигает максимума.

Вычислим сначала число пассажиров, перевозимых в одном скором (N_c) и в одном пассажирском (N_p) поезде. Из условий задачи находим:

$$N_c = 5 \cdot 58 + 6 \cdot 40 + 3 \cdot 32 = 626; \quad N_p = 8 \cdot 58 + 4 \cdot 40 + 1 \cdot 32 = 656.$$

Если за n_1 обозначить количество скорых поездов, за n_2 количество пассажирских поездов, которые можно сформировать из имеющегося парка вагонов, то максимальное число перевозимых пассажиров будет получено в результате решения следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}
Z \text{ X} &= 626n_1 + 656n_2 \rightarrow \max; \\
5n_1 + 8n_2 &\leq 92; \\
6n_1 + 4n_2 &\leq 80; \\
3n_1 + n_2 &\leq 30; \\
n_1 \geq 0, \quad n_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Получилась обычная задача линейного программирования. Но из её постановки очевидно, что нас могут интересовать только такие решения, которые представляются натуральными числами. В данном случае мы таких чисел не получим (проверьте это). Возникает вопрос, как же найти целочисленные решения, оптимизирующие функционал в этой и аналогичной ей задачах.

В линейном программировании разработан метод решения таких задач. В честь итальянского математика, разработавшего этот метод, он называется методом Гомори. С ним можно ознакомиться в учебном пособии [2].

Если число неизвестных решаемой задачи невелико, точнее, если решаемая задача допускает использование графического метода исследования, то можно предложить следующую процедуру нахождения оптимальных целочисленных решений таких задач:

Надо изобразить на плоскости фазовых переменных X область допустимых значений задачи и определить в этой области точки с целочисленными координатами. Затем вычислить значения оптимизируемой функции в этих точках и из этих значений выбрать оптимальное.

Так, например, для рассмотренной выше задачи [(4), с.17], решенной графическим методом, множество допустимых значений переменных X является внутренностью треугольника ABC, изображенного на рис.1. Из этого рисунка легко найти, что этому треугольнику могут принадлежать лишь следующие точки с целочисленными координатами

$$A_1(0;2), A_2(0;3), A_3(1;1), A_4(1;2), A_5(1;3), A_6(2;2), A_7(3;2).$$

Вычислив значения оптимизируемой функции в этих точках, находим, что наибольшее значение эта функция принимает в точке $A_5(1;3)$. Это значение равно 480.

Итак, величины $(x_1=1, x_3=3)$ будут целочисленным решением задачи [(4), с.17]; при этих значениях оптимизируемая функция принимает значение 480.

6. Транспортная задача

Методы линейного программирования могут быть с успехом применены при решении ряда конкретных практических задач. Одной из таких задач будет так называемая транспортная задача:

Однородный груз в объёмах a_1, a_2, \dots, a_m находится у m поставщиков. Этот груз необходимо доставить в объемах b_1, b_2, \dots, b_n , n потребителям.

Пусть c_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) – стоимость перевозки единицы груза от каждого i -того поставщика каждому j -тому потребителю. Составить план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворяются и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные этой задачи занесем в следующую таблицу

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	\dots	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	\dots	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	\dots	c_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_m	c_{m1}	c_{m2}	\dots	c_{mn}

Пусть x_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) – объемы перевозок от каждого i -того поставщика каждому j -тому потребителю. Эти переменные запишем в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда математическая модель транспортной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} Z(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min; \\ x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Например, математическая модель транспортной задачи, исходные данные которой представлены в таблице

$a_i \backslash b_j$	50	70	80
90	9	5	3
110	4	6	8

формулируется так: найти элементы матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix},$$

обеспечивающие минимум целевой функции

$$Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23},$$

выражающей суммарные затраты на перевозку всех грузов, и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 90 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 110 \\
x_{11} + x_{21} &= 50 \\
x_{12} + x_{22} &= 70 \\
x_{13} + x_{23} &= 80
\end{aligned}$$

и условиям неотрицательности $x_{ij} \geq 0, i=1, 2; j=1, 2, 3$.

Первые два уравнения описывают тот факт, что запасы всех поставщиков вывозятся полностью. Вторая группа из трех уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех потребителей. В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum_i a_i = \sum_j b_j$. Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель – закрытой. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а её модель - открытой.

Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортной задачи разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплекс-метод, а именно:

- нахождение исходного опорного решения;
- проверка этого решения на оптимальность;
- переход от одного опорного решения к другому.

6.1. Этапы решения транспортной задачи

Рассмотрим каждый из этих этапов.

Условия задачи и ее исходное опорное решение будем записывать в распределительную таблицу. Клетки, в которые поместим грузы, называются занятыми, им соответствуют базисные переменные опорного решения.

Остальные клетки незанятые, или пустые, им соответствуют свободные переменные.

В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать тарифы. Существует несколько способов нахождения исходного опорного решения.

Рассмотрим один из них – метод минимального тарифа (элемента). Согласно этому методу, грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок c_{ij} . Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем $m+n-1$. В этом случае недостающее их число заполняется клетками с нулевыми поставками, такие клетки называют условно занятыми.

Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждой строке и столбце было не менее чем по одной занятой клетке.

6.2. Пример нахождения исходного опорного решения.

Рассмотрим нахождение исходного опорного решения транспортной задачи на конкретном примере.

1. Определение эффективного варианта доставки изделий к потребителю.

На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно.

Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы \min .

Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (усл. ед.)

$\begin{matrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{matrix}$

Проверим, является ли данная транспортная задача закрытой.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_i &= 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т} \\ \sum_{j=1}^3 b_j &= 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т} \end{aligned} \quad \text{закрытая}$$

Найдем исходное опорное решение по методу min тарифа.

$a_i \backslash b_j$		1	2	3
		140	300	160
1	90	90		
2	400		300	100
3	110	50		60

Число занятых клеток в таблице равно $m+n-1=3+3-1=5$, т.е. условие невырожденности выполнено. Получим исходное опорное решение, которое запишем в виде матрицы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составляет

$$Z(X_1) = 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610 \text{ усл. ед.}$$

2. Проверка найденного опорного решения на оптимальность

Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система

$m+n$ действительных чисел u_i и v_j , удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ для свободных клеток.

Числа u_i и v_j называют потенциалами. В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i .

Потенциалы u_i и v_j находят из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для занятых клеток. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Так, если известен потенциал u_i , то $v_j = c_{ij} - u_i$; если известен потенциал v_j , то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Эту оценку называют оценкой свободных клеток. Если $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Проверим найденное опорное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу столбец u_i и строку v_j .

Полагая $u_1 = 0$, запишем это значение в последнем столбце таблицы

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 90	5	2	0
	400	4	1 300	5 100	-2
3	110	3 50	6	8 60	1
	v_j	2	3	7	

Рассмотрим занятую клетку первой строки, которая расположена в первом столбце (1,1), для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$, откуда $v_1 = 2$. Это

значение запишем в последней строке таблицы. Далее надо рассмотреть ту из занятых клеток таблицы, для которой один из потенциалов известен. Рассмотрим занятую клетку (3;1): $u_3+v_1=3$, $v_1=2$, откуда $u_3=1$.

Для клетки (3,3): $u_3+v_3=8$, $u_3=1$, $v_3=7$

Для клетки (2,3): $u_2+v_3=5$, $v_3=7$, $u_2=-2$

Для клетки (2,2): $u_2+v_2=1$, $u_2=-2$, $v_2=3$

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12}=u_1+v_2-c_{12}=0+3-5=-2<0,$$

$$\Delta_{13}=u_1+v_3-c_{13}=0+7-2=5>0,$$

$$\Delta_{21}=u_2+v_1-c_{21}=-2+2-4=-4<0,$$

$$\Delta_{32}=u_3+v_2-c_{32}=1+3-6=-2<0.$$

Получили одну оценку $\Delta_{13}=5>0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

3. Переход от одного опорного решения к другому.

Наличие положительной оценки свободной клетки ($\Delta_{ij}>0$) при проверке опорного решения на оптимальность свидетельствует о том, что полученное решение не оптимально и для уменьшения значения целевой функции надо перейти к другому опорному решению.

При этом надо перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых клеток - свободной.

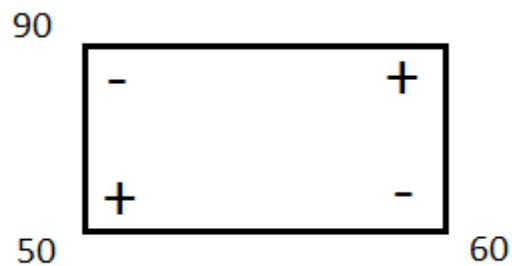
Для свободной клетки с $\Delta_{ij}>0$ строится цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого кроме одной находятся в занятых клетках; углы

прямые, число вершин четное. Около свободной клетки ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин со знаком (-) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (-). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение.

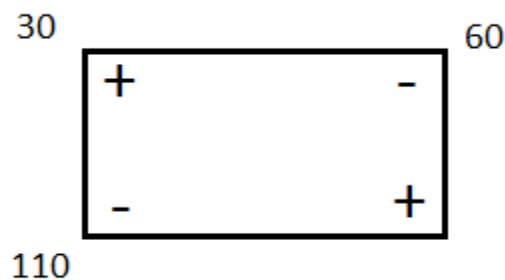
Это решение проверяем на оптимальность, и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим переход от одного опорного решения к другому на заданном примере.

Строим цикл для клетки (1,3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (-) и записываем грузы



У вершин со знаком (-) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получим новый цикл:



$$\text{Новое опорное решение } X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого запишем его в распределительную таблицу, найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток (таблицы):

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 30	5	2 60	0
2	400	4	1 300	5 100	3
3	110	3 110	6	8	1
v_j		2	-2	2	

Вычислим оценки свободных клеток:

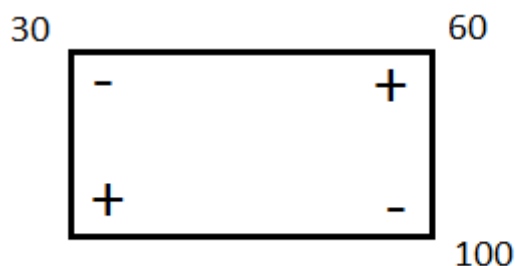
$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 2 - 5 = -7;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 2 - 4 = 1 > 0;$$

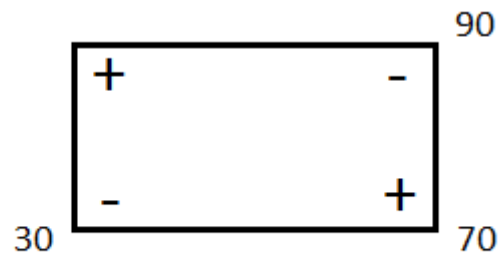
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 - 2 - 6 = -7;$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 1 + 2 - 8 = -5.$$

Построим цикл для клетки (2,1) с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1 > 0$



Произведем перераспределение грузов:



Получим новое решение $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, которое занесем в таблицу.

Проверим его оптимальность

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90			90	0
2	400	30	300	70	3
3	110	110			2
v_j		1	-2	2	

Найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 2 - 5 = -7$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 2 - 2 - 6 = -6$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 2 + 2 - 8 = -4$$

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное. Итак, $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Стоимость транспортных расходов равна

$$Z(X)_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ усл.ед.}$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшены на $1610 - 1280 = 330$ усл.ед.

6.3. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Пусть требуется при решении транспортной задачи ограничить перевозки от поставщика с номером l к потребителю с номером k .

Возможны ограничения двух типов: 1) $x_{lk} \geq a$; 2) $x_{lk} \leq b$, где a и b – постоянные величины.

1. Если $x_{lk} \geq a$, то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить (уменьшить) запасы l -го поставщика и запросы k -го потребителя на величину a (зарезервировать перевозку $x_{lk}=a$). После получения оптимального решения следует увеличить объем перевозки x_{lk} на величину a .

2. Если $x_{lk} \leq b$, то необходимо вместо k -го потребителя с запросами b_k ввести двух других потребителей. Один из них с номером k должен иметь запросы $b'_k=b$, а другой с номером $(n+1)$ – запросы $b_{n+1}=b_k-b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу M ($M \gg 1$). После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n+1)$ -му потребителю, прибавляются к величинам перевозок k -го потребителя. Так как $c_{l(n+1)}=M$ – самая большая

стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером $(l, n+1)$ останется пустой ($x_{l(n+1)}=0$) и объем перевозки x_{lk} не превзойдет b .

Пример. Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в таблице,

$a_i \backslash b_j$	600	500	400
300	2	9	10
400	2	11	13
500	4	10	12

при дополнительных условиях: объем перевозки груза от второго поставщика второму потребителю должен быть не менее 200 ед. ($x_{22} \geq 200$), а от третьего первому не более 300 ед. ($x_{31} \leq 300$).

Решение. Для того, чтобы в оптимальном решении объем перевозки x_{22} был не менее 200 ед., при решении задачи будем предполагать, что запасы второго поставщика a_2 и запросы второго потребителя b_2 меньше фактических на 200 ед. После получения оптимального решения объем перевозки x_{22} увеличим на 200 ед.

Для того чтобы удовлетворить требованию $x_{31} \leq 300$, вместо первого потребителя введем двух других. Один из них под прежним первым номером имеет запросы $b_1=300$, и прежние стоимости перевозок единиц груза.

Другому присвоим четвертый номер. Его запросы равны $b_4=600-300=300$ ед. и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у первого потребителя, за исключением c_{34} , которую примем равной сколько угодно большому числу M , т.е. $c_{34}=M$. После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для четвертого потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для первого потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь следующий вид:

$a_i \backslash b_j$	300	300	400	300
300	2	9	10	2
200	2	11	13	2
500	4	10	12	M

Далее задачу решаем обычным методом потенциалов. Проверим выполнение необходимого и достаточного условия существования решения задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 300 + 200 + 500 = 1000; \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 300 + 300 + 400 + 300 = 1300.$$

Задача открытая (с неправильным балансом). Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1300 - 1000 = 300$ ед.

		$v_1=2$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=2$
$a_i \backslash b_j$		300	300	400	300
$u_1=0$	300	2	9	10	2
	300				0
$u_2=1$	200	2	11	13	2
					200
$u_3=10$	500	4	10	12	M
			300	200	
$u_4=-2$	300	0	0	0	0
				200	100

Составляем начальное опорное решение X_1 методом минимальной стоимости, и находим потенциалы.

Вычисляем оценки для свободных клеток таблицы.

$$\Delta_{12}=u_1+v_2-c_{12}=0+0-9=-9<0;$$

$$\Delta_{13}=u_1-v_3-c_{13}=0+2-10=-8<0;$$

$$\Delta_{14}=u_1+v_1-c_{14}=0+2-2=0;$$

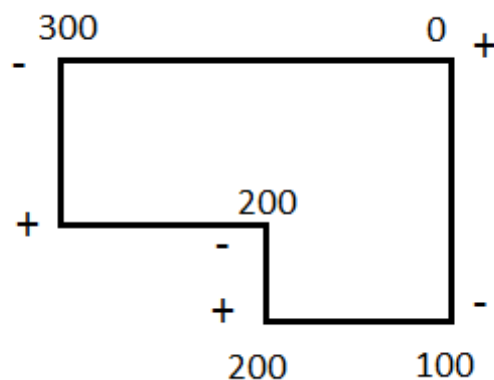
$$\Delta_{21}=u_2+v_1-c_{21}=1+2-2=1>0;$$

$$\Delta_{22}=u_2+v_2-c_{22}=1+0-11=-10<0;$$

$$\Delta_{23}=u_2+v_3-c_{23}=1+2-13=-10<0;$$

$$\Delta_{31}=u_3+v_1-c_{31}=10+2-4=8>0.$$

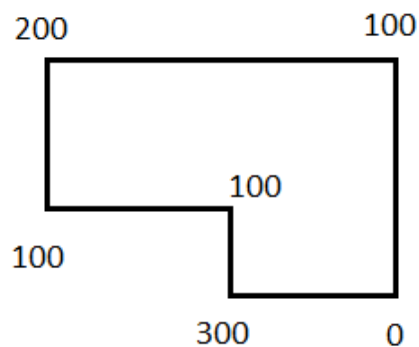
Все оценки неположительные, кроме оценки $\Delta_{31}=8$. Находим цикл для клетки (3,1). Он состоит из клеток (3,1), (1,1), (1,4), (4,4), (4,3), (3,3)



Находим величину груза для перераспределения по означенному циклу

$$\theta = \min_{-}(200, 100, 300) = 100 \text{ при } (i,j)=(4,4).$$

Осуществляем сдвиг по этому циклу на величину $\theta = 100$,



получим второе опорное решение $X_2 =$

$$\begin{array}{cccc} 200, & 0, & 0, & 100 \\ 0, & 0, & 0, & 200 \\ 100, & 300, & 100, & 0 \\ 0, & 0, & 300, & 0 \end{array}.$$

Решение X_2 оптимальное, т.к. все оценки неположительные. Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем перевозки x_{22} на 200 единиц и объединим объемы перевозок четвертого потребителя с

объемом перевозок первого потребителя получим $X^* =$

$$\begin{array}{cccc} & 300, & 0, & 0 \\ 200, & 200, & 0 & \\ 100, & 300, & 100 & \end{array}.$$

Вычисляем значение целевой функции на оптимальном решении:

$$Z(X^*) = 300 \cdot 2 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 11 + 100 \cdot 4 + 300 \cdot 10 + 100 \cdot 12 = 7800.$$

Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом:

1. Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(n+1)$ - го потребителя с запросами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, равными разности суммарных запасов поставщиков и запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза

$$C_{i(n+1)} = 0 \quad \forall i$$

2. Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(m+1)$ - го поставщика с запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, равными разности суммарных запросов потребителей и запасов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза

$$C_{(m+1)j}=0 \quad \forall j.$$

3. При составлении начального опорного решения в последнюю очередь следует распределять запасы фиктивного поставщика и удовлетворять запасы фиктивного потребителя, несмотря на то, что им соответствует наименьшая стоимость перевозок, равная нулю.

7. Двойственный симплексный метод

Двойственный симплексный метод или метод последовательного уточнения оценок как и обычный симплексный метод, позволяет в результате последовательного улучшения так называемых почти допустимых опорных решений (ПДОР) либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$\begin{array}{lll}
 Z(X)=CX - \max & C=(c_1, c_2, \dots, c_n) & X= \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \\
 A_1x_1+A_2x_2+\dots+A_nx_n=A_0 & A= \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} & A_0= \begin{array}{c} b \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \quad X \geq 0
 \end{array}$$

ПДОР задачи линейного программирования называется такой n -мерный вектор

$X= x_1, x_2, x_m, 0, \dots, 0$, который удовлетворяет системе ограничений, не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных и для которого векторы условий A_1, A_2, \dots, A_m , соответствующие отличным от нуля координатам, линейно независимы.

В двойственном симплексном методе рассматривается ПДОР, при которых оценки Δ_k разложений векторов условий A_k по базису ПДОР соответствуют признаку оптимальности, т.е:

- в задаче на max, $\Delta_k \geq 0 \quad \forall k$;

- в задаче на min $\Delta_k \leq 0 \quad \forall k$.

Почти допустимое опорное решение является оптимальным, если оно является допустимым (признак оптимальности ПДОР).

Если в задаче линейного программирования на max (min) для заданного ПДОР с неотрицательными (неположительными) оценками хотя бы одна координата отрицательная $x_{l_0} < 0$ и при этом среди коэффициентов x_{lj} ($j=1,2,\dots,n$) разложений векторов условий по базису данного решения существует хотя бы один отрицательный $x_{lk} < 0$, то решение может быть улучшено (приближено к оптимальному), т.е можно построить новое ПДОР, для которого значение целевой функции будет меньше (больше), если из его базиса вывести вектор A_l и ввести вектор A_k , номер которого находится из условия

$$\theta_{ol} = \min_j \frac{\Delta_j}{x_{lj}} = \frac{\Delta_k}{x_{lk}}, x_{lj} < 0. \quad (*)$$

Если для ПДОР существует хотя бы одна отрицательная координата x_{l_0} и при этом не существует отрицательного коэффициента x_{lj} разложений векторов условий A_j ($j=1,2,\dots,n$), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений (признак отсутствия решения задачи ввиду несовместности системы ограничений).

Алгоритм двойственного симплексного метода:

1. Привести задачу к каноническому виду.

2.Найти ПДОР с базисом из единичных векторов, вычислить оценки векторов условий по базису этого решения и, если они согласуются с признаком оптимальности, решить задачу двойственным симплексным методом.

3.Если ПДОР не имеет отрицательных координат, то оно является допустимым и оптимальным. Решение задачи заканчивается.

4.Если ПДОР имеет отрицательную координату $x_{l0} < 0$, для которой соответствующие коэффициенты разложений всех векторов условий неотрицательные ($x_{lj} \geq 0 \forall j$), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений. Решение задачи прекращается.

5. Если имеется хотя бы одна отрицательная координата ПДОР $x_{l0} < 0$ и при этом найдется хотя бы один отрицательный коэффициент x_{lj} разложений векторов условий по базису решения, перейти к новому решению, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному. Номер вектора A_k , вводимого в базис, находится с использованием параметра θ_{ol} (см*). Номер вектора A_l , выводимого из базиса, находится из условия

$$\min_l x_{l0} \theta_{ol} \text{ в задаче на max}$$

$$\text{или } \max_l -x_{l0} \theta_{ol} \text{ в задаче на min.}$$

Далее перейти к пункту 3 данного алгоритма.

7.1. Пример применения двойственного симплекс-метода

Решить двойственным симплексным методом

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{l|l} -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5; & \text{Д} \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12; & -x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 15. & -x_5 \\ & -x_6 \end{array}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Решение: Приводим задачу к каноническому виду, для чего вводим в левые части ограничений - неравенств неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5, x_6

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 15$$

$$x_j \geq 0, j=1, 6$$

Для нахождения ПДОР с базисом из единичных векторов умножим каждое из уравнений на (-1) , получим

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= -5; \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 &= -12; \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_6 &= -15. \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j=1, 6$$

				2↓	15	6	0	0
Б	C ₆	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
A ₄	0	-5	1	-3	1	1	0	0
A ₅	0	-12	-3	-1	-2	0	1	0
A ₆	0	-15	-1	-1	-1	0	0	1
Δ _j		0	-2	-15	-6	0	0	0
θ ₁			-	5	-	-	-	-
θ ₂			2/3	15	3	-	-	-
θ ₃			2	15	6	-	-	-

Записываем начальное ПДОР: $X_1 = (-0; 0; 0; -5; -12; -15)$ с базисом $B_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

Вычисляем оценки Δ_j разложений векторов условий по базису ПДОР и заполняем 1-ую симплекс-таблицу. Оценки для векторов условий, не входящих в базис, отрицательные. Следовательно, условия применимости двойственного симплексного метода к задаче на отыскание \min выполнены. Начальное ПДОР X_1 не является оптимальным, т.к. не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных задачи.

Переходим к новому ПДОР с неположительными оценками для векторов условий.

Для того чтобы оценки остались неположительными, необходимо номер k вектора A_k , вводимого в базис, выбрать из условия (*):

$$\theta_{0l} = \min_j \frac{\Delta_j}{x_{lj}} = \frac{\Delta_k}{x_{lk}}, \quad x_{lj} < 0$$

(В таблицах отношения $\frac{\Delta_j}{x_{lj}}$, соответствующие минимуму параметра θ_{0l} выделены жирным шрифтом). При этом номер l вектора A_l , выводимого из базиса, должен соответствовать отрицательной координате x_l ПДОР. В данном случае отрицательными являются три координаты: $x_4 = -5$, $x_5 = -12$, $x_6 = -15$.

Для соответствующих строк (1, 2, и 3-й) симплексной таблицы находим:

$$\theta_{01} = \min_j \frac{-15}{-3} = \min_j (5) \text{ при } j=2;$$

$$\theta_{02} = \min_j \frac{-2}{-3}, \frac{-15}{-1}, \frac{-6}{-2} = \min_j \frac{2}{3}, 15, 3 = \frac{2}{3} \text{ при } j=1;$$

$$\theta_{03} = \min_j \frac{-2}{-1}, \frac{-15}{-1}, \frac{-6}{-1} = \min_j 2, 15, 6 = 2 \text{ при } j=1.$$

Отсюда следует, что оценки для векторов , не входящих в базис, останутся отрицательными, если при выведении первого вектора базиса A_4 ввести в базис вектор A_2 или при выведении второго или третьего векторов базиса (A_5 или A_6) ввести вектор A_1 .

Для обеспечения скорейшего достижения экстремума целевой функции задачи на отыскание \min номер l вектора, выводимого из базиса, определяем из условия : $\max_l \Delta Z_l = \max_l (-x_{l0} \theta_{0l}) \quad x_l < 0$,

где ΔZ_l есть приращение целевой функции , при выведении из базиса ПДОР вектор A_l . Вычисляем \max :

$$\begin{aligned} \max_l \Delta Z_l &= \max_l \quad - -5 \cdot 5; \quad - -12 \cdot \frac{2}{3}; \quad - -15 \cdot 2 = \\ &= \max(25, 8, 30) = 30 \text{ при } l=3. \end{aligned}$$

Третий ($l=3$) вектор базиса A_6 заменяем вектором A_1 ($\theta_{03} = 2$ при $j=1$).

Выполняем преобразование Гаусса с разрешающим элементом $a_{31} = -1$

			2	15↓	6	0	0	0
Б	C_6	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
← A_4	0	-20	0	-4	0	1	0	0
A_5	0	33	0	2	1	0	1	0
A_1	2	15	1	1	1	0	0	-1
Δ_j		30	0	-13	-4	0	0	-2
θ_1			—	13/4	—	—	—	—

Получаем новое ПДОР $X_2 = (15; 0; 0; -20; 33; 0)$

Данное решение X_2 не является оптимальным, т.к координата решения, содержащаяся в первой строке симплекс-таблицы отрицательна: $x_4 = -20$

Находим $\theta_{01} = \min_j \frac{-13}{-4} = \min \frac{13}{4}$ при $j=2$

Выводим из базиса A_4 , вводим A_2

Б	C _б	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
A ₂	15	5	0	1	0	-1/4	0	-1/4
A ₅	0	23	0	0	1	1/2	1	1/2
A ₁	2	10	1	0	1	1/4	0	1/4
Δ_j		95	0	0	-4	-13/4	0	-21/4

Получаем ПДОР $X_3=(10;5;0;0;23;0)$, которое является оптимальным, так как удовлетворяет условиям неотрицательности.

$$X_{3\text{опт.}}=(10;5;0;0;23;0); \min Z(X_3)=95.$$

8. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования.

Согласно методу Гомори задача линейного программирования сначала решается симплексным методом без учета целочисленности переменных. Если оптимальное решение оказывается целочисленным, то решение задачи заканчивается. Если оптимальное решение нецелочисленное, то из системы ограничений выбирается уравнение, для которого дробная часть координаты оптимального решения имеет наибольшее значение, и на его основе составляется дополнительное ограничение. Дополнительное ограничение отсекает от области допустимых решений нецелочисленное оптимальное решение, но при этом сохраняет целочисленные вершины этой области.

8.1. Алгоритм метода Гомори

Пусть i -е ограничение задачи, находящейся в последней симплексной таблице, имеет вид:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j = x_i^*, \quad (12)$$

где x_i - базисная переменная в уравнении;

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных (коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения);

x_i^* - правая часть уравнения (координата оптимального решения), которая является дробным числом.

Тогда дополнительное ограничение имеет вид:

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^n q_{ij} x_j \leq 0, \quad (13)$$

где q_i^* - дробная часть x_i^* ;

q_{ij} - дробная часть a_{ij} .

Число $E(x_i)$ обозначает целую часть вещественного числа x_i . [Читается *антье* x_i (от французского слова *entier* – целый)]. Оно наиболее близкое к нему целое и не превосходит x_i .

Дробная часть q_i числа x_i находится как разность этого числа и его целой части:

$$q_i = x_i - E(x_i). \quad (14)$$

Например, для числа $\frac{7}{4}$ целая часть $E(\frac{7}{4})=1$, дробная часть равна $\frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$. Для числа $-\frac{9}{5}$ целая часть $E(-\frac{9}{5}) = -2$, дробная часть равна $-\frac{9}{5} - (-2) = \frac{1}{5}$. Дробная часть всегда меньше единицы и неотрицательна.

В неравенство (13) вводится дополнительная переменная x_{n+1} , получается уравнение

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^n q_{ij} x_j + x_{n+1} = 0. \quad (15)$$

В систему ограничений задачи это ограничение записывается в виде:

$$- \sum_{j=m+1}^n q_{ij} x_j + x_{n+1} = -q_i^*. \quad (16)$$

После этого решение задачи продолжают двойственным симплексным методом. Если получается целочисленное решение, то процесс решения заканчивается, в противном случае необходимо снова составить дополнительное ограничение. Задача не имеет целочисленного решения, если оптимальное решение содержит координату с дробной частью и все коэффициенты соответствующего уравнения являются целыми.

8.2. Пример применения метода Гомори

Найти оптимальное целочисленное решение задачи:

$$Z(X) = -2x_1 - x_2 + 6x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{array}{l|l} & \text{Д} \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2; & -x_4 \\ -x_2 + 2x_3 \leq 3; & +x_5 \\ -2x_2 + 3x_3 \leq 6; & +x_6 \end{array}$$

$$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j=1,2,3.$$

Решение: приводим задачу к каноническому виду с помощью дополнительных переменных x_4, x_5, x_6 .

$$Z(X) = -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2;$$

$$-x_2 + 2x_3 + x_5 = 3;$$

$$-2x_2 + 3x_3 + x_6 = 6;$$

$$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j=1,2,3,4,5,6.$$

Данная задача имеет начальное опорное решение $X_1 = (2, 0, 0, 0, 3, 6)$ с базисом из единичных векторов $B_1 = (A_1, A_5, A_6)$. Все описанные ниже вычисления приведены в таблице. Записываем опорное решение в симплексную таблицу и вычисляем оценки разложений векторов условий по базису этого решения. Данное решение не является оптимальным, т.к. в

задаче на максимум для вектора A_3 оценка $\Delta_3 = -8 < 0$. Вводим в базис опорного решения вектор A_3 , вместо вектора A_5 , получаем оптимальное решение $X_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2})$ с дробными координатами. Составляем дополнительное ограничение вида (16). Для этого используем ограничение, у которого правая имеет бóльшую дробную часть. Находим дробные части правых частей уравнений (координат опорного решения): $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Так как они равны между собой, для составления дополнительного ограничения используем по своему усмотрению первое уравнение. Находим дробные части коэффициентов этого уравнения:

$$1-1=0; -\frac{3}{2} - (-2)=\frac{1}{2}; 0-0=0; -1-(-1)=0; -\frac{1}{2} - -1 = \frac{1}{2}.$$

Составляем дополнительное ограничение:

$$-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 + x_7 = -\frac{1}{2}.$$

Это уравнение записано в таблице после строки оценок, и так как оно имеет разрешенную неизвестную x_7 , вектор A_7 включаем в число базисных неизвестных, в результате чего опорное решение X_2 превращается в почти допустимое опорное решение $X_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Введение вектора A_7 в базис не приводит к изменению оценок. В задаче на максимум все оценки неотрицательные, условия для применения двойственного симплексного метода выполняются. Теперь вектор A_7 необходимо вывести из базиса, так как дополнительное ограничение имеет в правой части отрицательную величину. С помощью параметра θ_{0l} , вычисляемого по формуле(*, стр.67), находится вектор A_2 , вводимый в базис. В результате преобразования Гаусса-Жордана с разрешающим элементом $-\frac{1}{2}$ при x_2 получается новое опорное решение $X_3 = (2, 1, 2, 0, 0, 2, 0)$, координаты которого являются целыми. Следовательно, это и есть оптимальное решение. Ответ: $\max Z(X)=7$ при $X^*=(2,1,2)$.

			-2	↓-1	↓6	0	0	0		
	Б	C ₆	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	θ ₃
←	A ₁	-2	2	1	-2	1	-1	0	0	2
	A ₅	0	3	0	-1	2	0	1	0	3/2
	A ₆	0	6	0	-2	3	0	0	1	2
	Δ _K		-4	0	5	-8	2	0	0	A ₇
	A ₁	-2	1/2	1	-3/2	0	-1	-1/2	0	0
	A ₃	6	3/2	0	-1/2	1	0	1/2	0	0
	A ₆	0	3/2	0	-1/2	0	0	-3/2	1	0
	Δ _K		8	0	1	0	2	4	0	0
←	A ₇	0	-1/2	0	-1/2	0	0	-1/2	0	1
	θ ₇			-	2	-	-	8	-	-
	A ₁	-2	2	1	0	0	-1	1	0	-3
	A ₃	6	2	0	0	1	0	1	0	-1
	A ₆	0	2	0	0	0	0	-1	1	-1
	A ₂	-1	1	0	1	0	0	1	0	-2
	Δ _K		7	0	0	0	2	3	0	2

9.Практикум по линейному программированию

Задания

1. Решить графическим методом задачи с двумя переменными(табл. 1).
2. Решить графическим методом задачи с n переменными (табл. 2).
3. Решить методом искусственного базиса задачи линейного программирования (см. табл. 2).
- 4.Решить симплексным методом задачи (табл. 3).
5. Решить методом потенциалов транспортные задачи (табл. 4).
6. Решить методом потенциалов транспортные задачи с ограничениями на пропускную способность (табл. 5).

Таблица 1. Варианты задания 1

Вариант	Задача	Вариант	Задача
1	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$ $-2x_1 + x_2 \leq 2,$ $x_1 - 3x_2 \geq -9,$ $4x_1 + 3x_2 \leq 24,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	2	$Z(X) = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$ $4x_1 - x_2 \geq 0,$ $-x_1 + x_2 \leq 3,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
3	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$ $-6x_1 + x_2 \leq 3,$ $-5x_1 + 9x_2 \leq 45,$ $x_1 - 3x_2 \leq 3,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	4	$Z(X) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 4,$ $-x_1 + 2x_2 \leq 8,$ $x_1 + x_2 \leq 10,$ $4x_1 - x_2 \leq 20,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
5	$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 6,$ $x_1 + 2x_2 \geq 10,$ $x_1 - 5x_2 \leq 5,$ $x_1 + x_2 \leq 4,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	6	$Z(X) = 15x_1 + 10x_2 \rightarrow \max,$ $6x_1 - x_2 \geq 3,$ $-x_1 + 2x_2 \leq 8,$ $3x_1 + 2x_2 \leq 24,$ $x_1 - x_2 \leq 3,$ $x_1 + 2x_2 \geq 2,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
7	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$ $3x_1 - x_2 \geq 0,$ $x_1 - x_2 \geq -2,$ $4x_1 - x_2 \leq 16,$ $2x_1 - x_2 \leq 6,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	8	$Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 + x_2 \geq 4,$ $-x_1 + x_2 \leq 4,$ $x_1 + 2x_2 \leq 14,$ $-x_1 + 3x_2 \geq 5,$ $x_1 \leq 4,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
9	$Z(X) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max,$ $-x_1 + x_2 \leq 2,$ $2x_1 + 3x_2 \geq 16,$ $x_1 + x_2 \leq 10,$ $2x_1 - x_2 \leq 8,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	10	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$ $2x_1 - x_2 \geq 0,$ $-x_1 + 2x_2 \leq 3,$ $x_2 \leq 3,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
11	$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 + x_2 \geq 9,$ $x_1 + 2x_2 \leq 15,$ $x_1 + 2x_2 \geq 9,$ $2x_1 + x_2 \leq 15,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	12	$Z(X) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$ $-x_1 + 2x_2 \leq 12,$ $2x_1 - x_2 \leq 6,$ $-x_1 + x_2 \leq 3,$ $2x_1 + x_2 \leq 6,$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
13	$Z(X) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max,$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 6,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6,$ $x_1 \leq 6,$ $x_2 \leq 6,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	14	$Z(X) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 - x_2 \geq -2,$ $-x_1 + 2x_2 \leq 7,$ $-4x_1 + 3x_2 \geq -12,$ $x_1 + 3x_2 \geq 18,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
15	$Z(X) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$ $-4x_1 + x_2 \geq 0,$ $x_1 - x_2 \geq -3,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	16	$Z(X) = 5x_1 + 5x_2 \rightarrow \max,$ $-2x_1 + x_2 \leq 2,$ $-x_1 + 3x_2 \geq 9,$ $x_1 + x_2 \geq 3,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
17	$Z(X) = -x_1 - x_2 \rightarrow \max,$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 4,$ $-x_1 + 2x_2 \leq 8,$ $x_1 + x_2 \geq 10,$ $4x_1 - x_2 \leq 20,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	18	$Z(X) = 5x_1 - x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 0,$ $-5x_1 + 9x_2 \leq 45,$ $x_1 - 2x_2 \leq 4,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
19	$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 6,$ $x_1 + 2x_2 \geq 10,$ $x_1 - 3x_2 \leq 6,$ $x_1 + x_2 \geq 3,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	20	$Z(X) = -3x_1 - x_2 \rightarrow \min,$ $4x_1 - x_2 \geq 0,$ $2x_1 - x_2 \leq 0,$ $x_1 + x_2 \leq 3,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
21	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$ $x_1 + 2x_2 \geq 2,$ $x_1 + x_2 \geq 2,$ $2x_1 + x_2 \geq 4,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 0,$ $x_1 \geq 0,$	22	$Z(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$ $4x_1 - 5x_2 \geq 0,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 0,$ $2x_1 + 3x_2 \geq 6,$ $2x_1 + x_2 \geq 2,$
23	$Z(X) = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6,$ $3x_1 - 2x_2 \leq 6,$ $2x_1 + 3x_2 \geq 0,$ $x_1 + x_2 \geq -1,$ $x_2 \geq 0$	24	$Z(X) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 + 3x_2 \geq 6,$ $-2x_1 + 3x_2 \geq 6,$ $x_1 + x_2 \leq 3,$ $2x_1 - 3x_2 \leq 0,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
25	$Z(X) = x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$ $x_1 - 3x_2 \leq 0,$ $x_1 - x_2 \geq 0,$ $2x_1 + x_2 \geq 6,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 18,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	26	$Z(X) = -5x_1 + x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 - 3x_2 \geq 0,$ $x_1 + 3x_2 \geq 9,$ $x_1 - 3x_2 \leq 3,$ $-x_1 + 3x_2 \leq 3,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
27	$Z(X) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 + 3x_2 \geq 0,$ $2x_1 + x_2 \geq 4,$ $3x_1 - x_2 \geq 0,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 12,$ $x_2 \geq 0$	28	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$ $x_1 + x_2 \geq 2,$ $x_1 - x_2 \leq 0,$ $3x_1 + x_2 \geq 6,$ $3x_1 - x_2 \geq 6,$
29	$Z(X) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \min,$ $2x_1 - x_2 \leq 4,$ $-x_1 + x_2 \leq 2,$ $3x_1 - 2x_2 \geq 0,$ $x_1 - x_2 \leq 0$	30	$Z(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$ $4x_1 - x_2 \geq 0,$ $-x_1 + x_2 \leq 3,$ $3x_1 + 2x_2 \geq 6,$ $2x_1 - 5x_2 \geq 0,$ $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Таблица 2. Варианты заданий 2 и 3

Вариант	Задача	Вариант	Задача
1	$Z(X) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8,$ $-7x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	2	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $2x_1 + 3x_2 + 7x_4 = 21,$ $-x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -12,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$
3	$Z(X) = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \min,$ $-5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1,$ $9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	4	$Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2,$ $11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
5	$Z(X) = 11x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $4x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1,$ $11x_1 - 11x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	6	$Z(X) = 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$ $2x_1 + 13x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 19,$ $3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 16,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$
7	$Z(X) = 12x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $-6x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2,$ $11x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	8	$Z(X) = x_1 - 19x_2 - 5x_3 - 7x_4 \rightarrow \min,$ $5x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -1,$ $-6x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 10,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$
9	$Z(X) = 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$ $-10x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2,$ $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 18,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	10	$Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 \rightarrow \min,$ $2x_1 - x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 10,$ $-x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$
11	$Z(X) = -22x_1 + 19x_2 - 5x_3 - 6x_4 \rightarrow \max,$ $4x_1 - 13x_2 + 7x_4 - x_4 = -1,$ $-4x_1 + 18x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	12	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$ $8x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4,$ $x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$
13	$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$ $3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2,$ $5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	14	$Z(X) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 \rightarrow \min,$ $-x_1 - 8x_2 + x_3 + 6x_4 = -2,$ $3x_1 + 27x_2 - 4x_3 - 22x_4 = -2,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$
15	$Z(X) = 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \max,$ $-2x_1 + 3x_3 - x_4 = -2,$ $3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 7,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$	16	$Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max,$ $-4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -2,$ $5x_1 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = -1,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
17	$Z(X) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max,$ $5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1,$ $3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$	18	$Z(X) = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 \rightarrow \max,$ $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 12,$ $2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 4,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$
19	$Z(X) = x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max,$ $-4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2,$ $-6x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 10,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$	20	$Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6,$ $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$
21	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 18x_4 \rightarrow \min,$ $-4x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -8,$ $4x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 12,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$	22	$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max,$ $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9,$ $-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$
23	$Z(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_4 \rightarrow \max,$ $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,$ $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 8,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$	24	$Z(X) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \max,$ $3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3,$ $x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$
25	$Z(X) = 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$ $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2,$ $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$	26	$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \max,$ $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8,$ $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$
27	$Z(X) = 7x_1 - 10x_3 + 6x_4 \rightarrow \min,$ $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3,$ $x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 8,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$	28	$Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \max,$ $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$

Вариант	Задача	Вариант	Задача
29	$Z(X) = -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \min,$ $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$ $-2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$	30	$Z(X) = 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8x_4 \rightarrow \max,$ $x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12,$ $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 12,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$

Таблица 3. Варианты задания 4

Вариант	Задача	Вариант	Задача
1	$Z(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max,$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$ $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9,$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	2	$Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min,$ $2x_1 + x_2 - x_3 \geq 5,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7,$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$
3	$Z(X) = x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max,$ $4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6,$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$ $x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 24,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	4	$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max,$ $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3,$ $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4,$ $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$
5	$Z(X) = x_1 - 8x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$ $3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 4,$ $x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -4,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	6	$Z(X) = -x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow \max,$ $3x_1 + x_2 + x_3 \geq 6,$ $x_1 + 3x_2 + x_3 = 10,$ $x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -2,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$
7	$Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$ $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3,$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 18,$ $-x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	8	$Z(X) = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max,$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8,$ $2x_1 + x_2 - x_3 = 6,$ $x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -4,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$
9	$Z(X) = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$ $4x_1 - x_2 - 2x_3 = 3,$ $x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4,$ $3x_1 - x_2 + x_3 \leq 12,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	10	$Z(X) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max,$ $3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 13,$ $x_1 - 3x_2 + x_3 = 1,$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$

Продолжение табл.3.

11	$\begin{aligned} Z(X) &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\geq 11, \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -23, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\geq -2, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$	12	$\begin{aligned} Z(X) &= 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq -2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4, \\ x_1 + 2x_3 &= 2, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$
13	$\begin{aligned} Z(X) &= x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_3 &\leq 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$	14	$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq -6, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$
15	$\begin{aligned} Z(X) &= 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\geq 4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$	16	$\begin{aligned} Z(X) &= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 6, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$
17	$\begin{aligned} Z(X) &= -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3, \\ x_1 + x_3 &\leq 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$	18	$\begin{aligned} Z(X) &= -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -8, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$
19	$\begin{aligned} Z(X) &= 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\geq -2, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$	20	$\begin{aligned} Z(X) &= 5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 12, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$
21	$\begin{aligned} Z(X) &= 6x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\geq -7, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$	22	$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$
23	$\begin{aligned} Z(X) &= x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\geq 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -6, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$	24	$\begin{aligned} Z(X) &= 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2, \\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &\geq -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$

Окончание табл.3.

Вариант	Задача	Вариант	Задача
25	$Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \rightarrow \min,$ $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 12,$ $x_1 - x_2 + x_3 \geq -2,$ $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	26	$Z(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min,$ $-x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -1,$ $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2,$ $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$
27	$Z(X) = 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \max,$ $x_1 - x_2 + x_3 = 6,$ $x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -8,$ $-2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 16,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	28	$Z(X) = x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \min,$ $-x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -3,$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5,$ $x_1 - x_2 - 3x_3 = 7,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$
29	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min,$ $x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -6,$ $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 12,$ $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$	30	$Z(X) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max,$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,$ $-x_1 - x_3 \geq -4,$ $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6,$ $x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3$

Таблица 4. Варианты задания 5

Вариант	Задача						Вариант	Задача					
1	$a_i \backslash b_j$	10	10	25	25	30	2	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300	200
	10	1	5	7	9	3		100	4	3	5	2	3
	20	4	6	4	7	13		200	7	1	2	3	1
	10	1	5	3	4	9		300	9	2	4	5	6
	30	2	4	2	10	3		100	1	3	6	4	10
	10	3	2	5	6	4		200	5	8	15	6	15
3	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200	100	4	$a_i \backslash b_j$	5	10	15	15	15
	200	1	7	12	2	5		10	2	5	5	6	7
	100	2	3	8	4	7		5	4	3	4	4	3
	200	3	5	4	6	9		5	5	2	3	6	2
	400	4	4	3	8	2		10	3	6	5	7	8
	400	5	3	7	10	1		15	1	9	7	6	4
5	$a_i \backslash b_j$	10	30	30	30	40	6	$a_i \backslash b_j$	20	20	40	40	40
	10	3	1	3	4	3		20	4	5	2	4	3
	30	5	1	2	2	6		40	3	1	3	5	2
	60	2	3	4	1	1		80	2	7	6	8	6
	10	6	2	5	3	2		40	3	3	1	4	9
	60	3	7	4	4	1		20	1	6	9	2	7

Вариант	Задача						Вариант	Задача					
7	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300	400	8	$a_i \backslash b_j$	200	200	300	300	100
	100	1	3	4	1	3		300	4	6	3	4	1
	200	5	4	5	7	5		200	7	3	5	2	2
	400	4	9	5	10	9		100	5	3	2	4	4
	200	7	7	5	8	13		100	2	3	4	6	5
	100	12	10	8	11	6		200	1	4	4	3	3
9	$a_i \backslash b_j$	200	400	400	300	500	10	$a_i \backslash b_j$	150	200	200	400	200
	200	1	6	9	3	4		150	1	4	7	2	4
	400	3	2	2	4	5		300	3	6	3	9	6
	600	4	5	4	7	6		250	4	8	12	2	5
	200	1	4	3	9	8		150	1	5	9	13	7
	200	7	9	7	1	9		200	2	3	4	6	5
11	$a_i \backslash b_j$	40	60	40	60	20	12	$a_i \backslash b_j$	300	200	300	100	
	20	3	3	4	2	3		300	3	4	3	1	
	40	1	2	1	5	3		200	2	3	5	6	8
	60	4	8	2	9	12		100	1	2	3	3	4
	40	5	7	9	6	5		200	4	5	7	9	9
	20	10	14	17	7	6		300	5	6	8	4	7
13	$a_i \backslash b_j$	20	20	40	10	30	14	$a_i \backslash b_j$	200	300	400	200	300
	20	1	1	3	4	5		200	1	3	4	2	5
	10	2	3	4	2	6		200	1	2	4	1	7
	20	1	1	4	7	8		300	3	4	5	9	8
	30	5	6	3	4	7		300	6	3	7	6	9
	10	4	5	7	6	4		100	5	6	7	3	4
15	$a_i \backslash b_j$	300	150	300	150	250	16	$a_i \backslash b_j$	50	50	100	100	50
	150	2	1	3	1	5		50	3	4	6	5	13
	250	8	3	7	4	6		50	6	3	7	6	10
	250	6	4	9	3	4		100	10	5	2	2	6
	150	5	2	4	2	3		150	9	4	4	9	5
	150	4	6	2	3	4		100	3	2	4	2	3
17	$a_i \backslash b_j$	200	200	400	200	100	18	$a_i \backslash b_j$	100	150	150	100	300
	200	5	2	1	6	4		50	3	4	5	4	1
	300	6	2	4	4	6		100	1	2	7	1	5
	200	9	2	3	7	5		150	4	6	6	3	7
	200	7	3	5	8	7		100	2	7	4	7	2
	100	3	2	4	2	3		200	3	8	9	4	5
19	$a_i \backslash b_j$	400	600	500	400	500	20	$a_i \backslash b_j$	100	150	150	100	100
	400	1	2	3	1	2		50	3	4	5	4	6
	500	3	4	2	4	5		100	1	5	7	1	5
	600	5	7	6	3	9		150	4	6	6	3	4
	400	4	10	15	4	8		100	2	7	4	7	2
	200	3	4	5	3	7		100	1	9	6	3	2

Вариант	Задача						Вариант	Задача					
21	$a_i \backslash b_j$	500	250	500	750	500	22	$a_i \backslash b_j$	300	900	600	900	300
	250	3	1	8	1	4		300	1	3	4	5	1
	500	2	5	2	3	5		600	9	5	2	4	8
	750	9	4	6	5	7		900	3	4	5	4	3
	250	7	3	10	3	2		600	5	7	2	6	6
	500	6	6	4	7	8		300	1	4	3	7	8
23	$a_i \backslash b_j$	200	300	200	300	100	24	$a_i \backslash b_j$	50	150	200	150	100
	100	2	3	4	5	1		50	4	5	6	10	9
	200	2	4	2	6	7		100	6	3	8	4	3
	300	6	5	4	5	4		150	5	1	3	1	7
	400	4	6	7	6	9		150	7	2	4	2	3
	400	5	7	6	9	8		100	1	5	7	8	4
25	$a_i \backslash b_j$	200	300	200	200	100	26	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	100	200
	200	1	5	1	1	5		100	2	3	4	2	5
	300	4	2	6	7	9		200	3	1	1	3	1
	100	3	4	5	6	5		300	4	3	3	5	4
	300	4	2	3	3	6		200	5	1	2	6	7
	300	6	2	3	5	4		100	2	9	8	7	6
27	$a_i \backslash b_j$	200	200	400	100	100	28	$a_i \backslash b_j$	50	100	100	200	200
	200	2	2	3	1	2		50	1	4	5	6	1
	100	1	2	3	4	5		100	2	2	2	5	5
	200	4	3	6	5	8		150	3	6	8	3	4
	100	1	2	3	7	5		200	4	7	9	4	8
	200	4	3	5	7	6		100	5	2	2	7	9
29	$a_i \backslash b_j$	100	100	200	200	300	30	$a_i \backslash b_j$	100	300	300	300	600
	300	1	2	3	4	8		300	4	2	2	5	3
	200	4	5	6	2	6		600	3	3	4	5	5
	100	1	1	3	4	5		100	1	2	3	4	6
	200	3	3	2	2	7		300	2	6	1	1	8
	300	5	6	7	8	10		600	3	4	5	5	9

Таблица 5. Варианты задания 6

Вариант	Задача					Вариант	Задача				
1	$x_{44} \leq 500, x_{23} \geq 500$					2	$x_{32} \leq 200, x_{11} \geq 100$				
	$a_i \backslash b_j$	500	500	1000	1500		$a_i \backslash b_j$	300	300	300	300
	1000	3	2	5	4		300	5	5	4	3
	1500	4	3	5	3		200	4	7	4	2
	500	1	1	3	2		400	3	2	3	4
3	$x_{21} \leq 500, x_{44} \geq 1000$					4	$x_{42} \leq 50, x_{24} \geq 50$				
	$a_i \backslash b_j$	1000	1000	2000	2000		$a_i \backslash b_j$	50	100	100	100
	500	5	6	3	8		50	2	4	5	8
	1000	1	1	2	3		100	5	3	4	6
	1500	2	5	4	4		50	3	1	2	4
29	2000	6	3	5	9		100	7	2	6	9

Вариант	Задача					Вариант	Задача				
5	$x_{44} \leq 100, x_{23} \geq 50$					6	$x_{43} \leq 50, x_{21} \geq 100$				
	$a_i \backslash b_j$	50	100	200	200		$a_i \backslash b_j$	100	200	100	200
	50	1	9	2	2		100	1	3	1	2
	100	6	4	10	3		200	4	7	3	5
	100	8	4	7	5		50	3	4	1	6
	200	7	6	5	3		100	7	8	3	6
7	$x_{11} \leq 20, x_{33} \geq 30$					8	$x_{21} \leq 10, x_{12} \geq 10$				
	$a_i \backslash b_j$	30	30	60	90		$a_i \backslash b_j$	40	20	10	20
	60	3	11	4	4		40	7	6	5	11
	30	2	10	5	6		20	3	4	2	2
	60	3	13	3	7		10	9	10	3	15
	30	1	4	2	1		10	1	5	1	3
9	$x_{44} \leq 20, x_{23} \geq 20$					10	$x_{32} \leq 100, x_{23} \geq 100$				
	$a_i \backslash b_j$	40	30	40	50		$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300
	20	5	3	1	6		100	4	3	5	2
	30	4	6	4	7		200	7	1	2	3
	20	4	1	2	3		300	9	2	4	5
	40	6	3	8	10		100	1	3	6	4
11	$x_{31} \leq 100, x_{42} \geq 100$					12	$x_{11} \leq 100, x_{42} \geq 200$				
	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200		$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200
	200	1	7	12	2		200	2	1	3	5
	100	2	3	8	4		100	4	3	4	7
	200	3	5	4	6		100	5	8	3	6
	200	4	4	3	8		400	3	5	2	4
13	$x_{32} \leq 20, x_{24} \geq 20$					14	$x_{43} \leq 20, x_{34} \geq 20$				
	$a_i \backslash b_j$	10	30	30	40		$a_i \backslash b_j$	20	20	40	40
	10	3	1	3	4		20	4	5	2	4
	50	5	1	2	2		40	3	1	3	5
	60	2	3	4	6		80	2	7	6	8
	40	7	2	5	3		40	3	3	1	4
15	$x_{33} \leq 100, x_{42} \geq 100$					16	$x_{21} \leq 500, x_{44} \geq 1000$				
	$a_i \backslash b_j$	100	500	200	300		$a_i \backslash b_j$	1000	1500	500	2000
	100	1	3	4	1		500	3	2	1	5
	200	5	2	2	7		1000	3	6	5	4
	400	4	4	3	6		1000	4	8	5	7
	200	7	2	5	3		1500	5	7	2	6
17	$x_{34} \leq 20, x_{12} \geq 20$					18	$x_{21} \leq 500, x_{44} \geq 500$				
	$a_i \backslash b_j$	40	60	50	40		$a_i \backslash b_j$	1000	500	1500	2000
	40	1	2	3	1		500	3	1	2	5
	50	4	2	2	9		1000	1	3	4	2
	50	5	7	10	5		500	3	6	5	6
	40	4	15	13	6		1500	4	3	9	8

Вариант	Задача					Вариант	Задача				
19	$x_{21} \leq 25, x_{32} \geq 20$					20	$x_{23} \leq 30, x_{32} \geq 30$				
	$a_i \backslash b_j$	50	25	50	25		$a_i \backslash b_j$	30	90	60	60
	25	3	1	8	1		30	1	3	4	5
	50	2	5	2	3		60	9	5	2	4
	75	9	4	6	5		90	3	4	5	4
	25	7	3	10	3		90	5	7	2	6
21	$x_{33} \leq 100, x_{42} \geq 100$					22	$x_{32} \leq 100, x_{43} \geq 100$				
	$a_i \backslash b_j$	200	300	200	300		$a_i \backslash b_j$	50	150	200	150
	100	2	3	4	5		50	4	5	6	10
	200	2	4	2	6		100	6	3	8	4
	300	6	5	4	5		150	5	1	3	1
	300	4	6	7	6		150	7	2	4	2
23	$x_{22} \leq 25, x_{44} \geq 25$					24	$x_{42} \leq 10, x_{23} \geq 20$				
	$a_i \backslash b_j$	25	50	75	50		$a_i \backslash b_j$	20	20	40	20
	25	1	1	3	4		20	2	2	3	4
	50	7	2	4	2		40	4	5	4	7
	50	8	9	5	6		20	6	7	3	5
	50	6	7	8	5		40	3	5	7	4
25	$x_{43} \leq 10, x_{22} \geq 5$					26	$x_{34} \leq 100, x_{43} \geq 50$				
	$a_i \backslash b_j$	5	10	15	10		$a_i \backslash b_j$	50	100	100	150
	5	2	2	4	5		50	1	3	4	1
	20	4	6	7	10		100	3	2	2	4
	15	5	3	3	6		150	4	8	9	5
	20	6	4	5	12		150	9	6	7	10
27	$x_{33} \leq 60, x_{42} \geq 60$					28	$x_{32} \leq 70, x_{43} \geq 140$				
	$a_i \backslash b_j$	60	120	180	120		$a_i \backslash b_j$	70	140	210	140
	60	1	3	2	1		70	1	2	1	3
	120	6	2	4	2		140	2	4	5	8
	180	5	9	5	10		210	3	5	6	9
	180	7	6	7	15		210	4	6	7	10
29	$x_{42} \leq 80, x_{23} \geq 80$					30	$x_{31} \leq 90, x_{44} \geq 90$				
	$a_i \backslash b_j$	80	160	240	160		$a_i \backslash b_j$	180	90	270	180
	80	2	5	2	3		90	1	3	4	1
	160	3	4	4	5		90	3	2	9	13
	80	4	3	6	7		180	3	4	5	8
	160	5	2	5	4		180	4	5	6	4

Заключение

Данное учебное пособие реализовано не только как справочный материал по методам оптимальных решений, но и как краткое руководство к решению задач линейного программирования. Такие задачи встречаются при оптимизации расчетных и организационных мероприятий при создании новых изделий и технологий, прогнозировании их развития, минимизации расходов на доставку материалов и ресурсов, максимизации прибыли, совершенствовании методов планирования и управления производством.

При подготовке пособия ставилась цель повышения уровня математической подготовки студентов для более полного, уверенного освоения навыков составления математических моделей, описывающих поведение различных экономических и производственных процессов в линейной или линеаризованной форме, умения решать полученные задачи линейного программирования подходящими методами.

Изучение методов оптимальных решений задач и их экономических и технических приложений позволит будущему специалисту не только приобрести необходимые компетенции, базовые навыки и умения, используемые в экономике и агроинженерии, но и сформировать компоненты своего мышления: уровень, кругозор и культуру. Всё это понадобится для успешной работы и для ориентации в будущей профессиональной деятельности.

Литература

1. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. – 68 с.
2. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник./Под ред. Ермакова В.И. – М.:ИНФРА – М, 2008. – 656 с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Учебное пособие./ Под ред. Ермакова В.И. – М.:ИНФРА – М, 2002. –575 с.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании. – М.: изд. «Дело» , 2003. – 688 с.

Учебное издание

Аксенов Евгений Петрович

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Подписано в печать 5. 05. 2016 г. Формат 60х84 1/16.

Усл. печ. л.5,63. Тираж 50 экз. Заказ 61

ИПЦ «Прокрость»

Пермской государственной сельскохозяйственной академии
имени академика Д.Н. Прянишникова,
614990, г. Пермь, ул. Петропавловская, 23 тел. (342) 210-35-34
E-mail:prokrost@bk.ru